

# RESUMEN ANALÍTICO

**TIPO DE DOCUMENTO:** Trabajo de grado

**ACCESO AL DOCUMENTO:** Universidad Pedagógica Nacional

**TITULO DEL DOCUMENTO:** Un acercamiento a la comprensión de la ecuación tipo FRW a través de Gnuplot

**AUTOR:** Yony Leonardo Papagayo Melgarejo

**ASESOR:** Yesid Cruz

**PUBLICACIÓN:** Bogotá, 2011

**PALABRAS CLAVE:** Relatividad General, Principio de equivalencia, Principio de mínimo acople gravitacional, Principio de Mach, Principio Cosmológico, Postulado de Weyl, Geodésica Métrica Robertson-Walker, Ley de Hubble, Efecto Doppler. Paralaje trigonométrico y fotométrico, Cefeida, Método Tully-Fisher, Supernova, lente gravitacional, In.ación, Gnuplot.

## DESCRIPCIÓN:

Este escrito muestra por medio de un estudio matemático y simulaciones, la evolución y desarrollo que han tenido las concepciones referentes a los modelos cosmológicos Friedmann-Robertson-Walker (FRW) en la cosmología moderna. Se realiza un análisis de los momentos cruciales de la ruptura conceptual que conlleva a cambios en la percepción dinámica y geométrica del universo en la actualidad. El estudio parte de la Teoría de la Relatividad General y los procesos que se dieron para llegar a la ecuación FRW. A continuación, se busca la solución a la ecuación (la cual es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden), para diferentes valores de los parámetros cosmológicos de la misma. Por consiguiente, se dará cuenta de los procesos y mecanismos que conllevan a los valores actuales e iniciales de los parámetros cosmológicos a tratar. Cada solución es considerada como un modelo FRW, que a su vez tendrá una representación gráfica a través del software Gnuplot. Finalmente, se planteará una propuesta de implementación de aula con el fin de que los estudiantes de astronomía y tópicos a.nes puedan contextualizar la teoría que encierran los modelos FRW por medio de la manipulación del software Gnuplot.

## FUENTES:

- D.Inverno, Ray. (1992/1998). The formalism of tensors, General Relativity, Cosmology. Introducing Einstein.s Relativity (4a Reimpresión, pp. 53-89, pp.

121-125, pp. 141-143, p. 153, pp. 171-173, pp. 305-347, p. 351, pp. 354-358). Oxford, NY: Clarendon Press.

- Misner, C., Thorne, K. & Wheeler, J. (1970/1973). Spacetime physics, Physics in flat spacetime, Einstein's geometric theory of gravity, The universe. Gravitation (1a Reimpresión, pp. 29-43, p. 305, pp. 333-343, p. 409, p. 703, pp. 713-718, pp. 765-797). New York, NY: W. H Freeman and Company.
- Weinberg, S. (1972). Historical introduction, The General Theory of Relativity, Cosmology. Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity (p. 10, pp. 19-20, pp. 409-419, pp. 426-440, pp. 445-450, pp. 469-481, p. 528, p. 533, p. 540). New York, NY: John Wiley and Sons, Inc.
- Hawking, S. & Ellis, R. (1973). Exact solutions. The large scale structure of space-time (Preface, pp. 134-137). Cambridge: Cambridge University Press.
- Guth, A. H. (1997/1999). El último almuerzo gratuito, Panorama del cosmos desde Ithaca, New York, El nacimiento de la cosmología moderna, Ecos de un pasado abrasador, El universo Inflacionario. El universo inflacionario: La búsqueda de una nueva teoría sobre los orígenes del cosmos (1a ed. en español, pp. 19-34, pp. 35-45, pp. 53-108, pp. 205-222, p. 354, pp. 356-359, pp. 361-363, pp. 367-368). Madrid: Debate Pensamiento.
- Liddle, A. & Lyth, D. (2000). The universe we see, The hot big bang cosmology, Inflation. Cosmological inflation and large-scale structure (pp. 3-4, pp. 12-17, pp. 22-25, pp. 27-32, pp. 36-39, p. 262, p. 266). Cambridge: Cambridge University Press.
- Liddle, R. A. (2000). Observational parameters, The cosmological constant, The density of the universe and dark matter, The inflationary universe. An introduction to modern cosmology (2a ed., pp. 45-49, pp. 51-54, pp. 63-73, pp. 99-100, pp. 103-107). Cambridge: Wiley.
- Sazhin, M. V. (2002/2005). ¿Qué es la cosmología?, Test de cosmología, Leyes evolutivas del mundo, Nacimiento del universo, Problemas metafísicos de la cosmología, Radiación de fondo cósmica, Estructura a gran escala del universo, La materia oscura del universo, Lentes gravitatorias, ¿Qué han descubierto los astrónomos?. Cosmología moderna (1a ed. en español, pp. 10-16, pp. 17-37, pp. 38-47, pp. 67-70, pp. 75-81, pp. 101-104, pp. 148-152, pp. 174-176, pp. 182-187, pp. 189-194, pp. 197-206, pp. 207-210). Moscú: Editorial URSS
- Tejeiro, S. J. (2005). Aplicaciones cosmológicas. Notas de clase: Principios de relatividad general (pp. 180-183, p. 193, pp. 201-202, pp. 205-207, p. 215, p. 219, p. 222). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Unibiblos.
- Roza, C. M. (1992). Sobre las Ecuaciones de Campo de Einstein y los agujeros negros. Monografía para optar al título de Licenciado en Física. Bogotá, D.C; Colombia: Universidad Pedagógica Nacional (UPN), Departamento de Física, Facultad de Ciencia y Tecnología.
- Weinberg, S. (2003). La expansión del universo, El fondo de radiación cósmica, La perspectiva futura. Los tres primeros minutos del universo (2a

Reimpresión en español, pp. 40-46, pp. 62-65, pp. 129-132). Madrid: Alianza Editorial.

- Einstein, A. (1933/1934). Notes on the origin of the general theory of relativity, The meaning of life. The world as I see it (2a Reimpresión en inglés, pp. 101-108, pp. 237-242). New York, NY: Covici-Friede Publishers.
- Zill, G. D. (1988). Ecuaciones diferenciales de primer orden, Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, Métodos numéricos, Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (3a ed., pp. 31-76, pp. 111-164, pp. 395-425, pp. 432-445 ). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Deitel, H. & Deitel, P. (1995). Introducción a la programación en C, Desarrollo de programas estructurados, Control de programa, Entradas/Salidas con formato, Flujo de entrada/salida de C++. Como programar en C/C++ (2a ed., pp. 23-46, pp. 54-87, pp. 100-136, pp. 364-372, pp. 796-806). México, DF: Prentice Hall.
- Hawking, S. W. (1989). El universo en expansión. Historia del tiempo (2a Reimpresión, pp. 59-79). Barcelona: Editorial Crítica.
- Chang, R. (2002). Teoría cuántica y la estructura electrónica de los átomos. Química (7a ed., p. 48, pp. 245-249, pp. 252-257, p. 292). Bogotá, DC: Mc Graw-Hill.
- Bennett, C., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M. et al. (2003). First Year WMAP observations: Preliminary maps and basic results. *Astrophysical Journal*, 33-37.
- Spergel, D., Bennett, C., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A. et al. (2003). First Year WMAP observations: Determination of cosmological parameters. *Astrophysical Journal*, 6-8.
- Freedman, W. L. (1998). Measuring cosmological parameters. *Proceeding National Academy of Sciences*, 95, 2-7.
- Liddle, A. & Lahav, O. (2010). The cosmological parameters. Arxiv: 1002.3488v1 [astro-ph], 4-6, 21-22.
- Guth, A. H. (2004). Inflation. Arxiv: 0404546v1 [astro-ph], 1-9, 17-21.
- Freedman, W. L. (2004). La constante de Hubble y el universo en expansión. *Investigación y Ciencia: Scientific American*, Junio, 38-45.
- Riess, G. & Turner, M. (2004). Cuando la aceleración cambio de signo. *Investigación y Ciencia: Scientific American*, Abril, 60-65.
- Caldwell, R. & Kamionkowski, M. (2003). Ecos de la gran explosión. *Investigación y Ciencia: Scientific American*, Diciembre, 76-80.
- Kirshner, R., Hogan, C. & Suntzeff, N. (2003). Exploración del espacio-tiempo mediante supernovas. *Investigación y Ciencia: Scientific American*, Diciembre, 26-31.
- Heredia, Victor.(2010). Micromundo para la enseñanza de la óptica en estudiantes de grado 8o. Monografía para optar al título de Licenciado en Física. Bogotá, D.C; Colombia: Universidad Pedagógica Nacional (UPN), Departamento de Física, Facultad de Ciencia y Tecnología.

## CONTENIDOS:

- **Introducción.**
- Se presenta una panorámica de la justificación, problemática y objetivos del trabajo, en la cual se hace énfasis en la importancia de comprender los procesos matemáticos que envuelven el estudio de los modelos cosmológicos tipo FRW en el universo. Dichos estudios están caracterizados por la complejidad matemática inmersa en ellos., pero en los cuales, tal caracterización puede verse modificada por la implementación de una propuesta de aula como herramienta didáctica, que a su vez es un aporte fundamental para facilitar la comprensión de los modelos. Esta herramienta metodológica es tanto dinámica como enriquecedora, para los alumnos de pregrado de la Universidad Pedagógica Nacional y los catedráticos involucrados en los cursos de Astronomía y cursos ajenos a la temática.
- **Capítulo I: De la Teoría General de la Relatividad a la Ecuación tipo FRW.**
- La Teoría General de la Relatividad es la piedra angular para el desarrollo de los modelos cosmológicos actuales. Es así, como las ecuaciones de campo de Einstein proporcionan las herramientas necesarias que permiten esclarecer la verdadera dinámica y geometría del universo; en consecuencia, cada solución merece un análisis individual, que permite vislumbrar los orígenes y consecuencias del mismo en la cosmología. Se parte en este capítulo del modelo de universo propuesto por Einstein, el cual no predecía corrimientos hacia el rojo; no obstante, William de Sitter encuentra una solución que se ajusta a la relación entre el corrimiento al rojo y la distancia. Por tanto, la solución de de Sitter es aceptada por la comunidad científica Europea, quien tras finalizar la Primera Guerra Mundial, obtuvo información desde América en la cual se reportaban grandes corrimientos al rojo. En efecto, la teoría de de Sitter tuvo gran acogida, pero aunque se considerara un modelo estático, no lo era en realidad. Parecía estático por el modo peculiar en que se introdujeron las coordenadas espaciales, pero la distancia entre observadores típicos en el modelo aumenta en realidad con el tiempo, y es esta separación general la que produce el corrimiento hacia el rojo. Este modelo satisface el principio cosmológico de homogeneidad e isotropía; por consiguiente, se prestó un mayor interés por los modelos que adoptaban el principio cosmológico pero que no eran estáticos. El trabajo monumental que realiza Albert Einstein al elaborar la TGR en 1916 y las contradicciones entre un universo estático y la verdadera fenomenología que describe la solución a sus ecuaciones de campo., motivan al Ruso Alexandre Friedmann a dar una interpretación coherente y elaborada referente a los resultados que arroja la solución a las ecuaciones de campo. Es este proceso y transición desde el contexto

histórico y formal, el que da forma al presente capítulo, contribuyendo este último al entendimiento de las concepciones que se dan hoy día, acerca de la imagen que se tiene de nuestro vasto universo.

- **Capítulo II: Los parámetros cosmológicos y las condiciones iniciales del universo.**
- Los parámetros cosmológicos son de vital importancia a la hora de comprender la dinámica y la geometría del universo observable. Cada uno de los parámetros ha sido objeto de investigación por los astrónomos, ya que el valor de cada uno de ellos determina la forma y características primordiales que posee el universo. Tales valores son obtenidos a través de técnicas observacionales y herramientas sofisticadas tales como el telescopio espacial Hubble, Chandra y radiotelescopios de todo el mundo que están en constante búsqueda de las pistas que puedan arrojar cada uno de los componentes del cosmos, específicamente objetos extragalácticos tales como las supernovas tipo Ia, agujeros negros supermasivos, galaxias, cúmulos, supercúmulos estelares y fenómenos como lentes gravitacionales. Son algunas de estas técnicas observacionales las que se abordan en este capítulo para conocer los valores de los parámetros cosmológicos actuales, de tal manera que se pueda realizar un contraste con las condiciones iniciales del universo buscadas.
- **Capítulo III: Modelos cosmológicos tipo FRW y representación en Gnuplot.**
- El software Gnuplot hace uso de las condiciones iniciales del universo para que de esta manera se puedan establecer rangos entre los cuales las representaciones cosmológicas tengan cabida de manera correcta. Se presenta en este capítulo un análisis cualitativo de cada solución cosmológica además de su respectiva representación gráfica, la cuál es elaborada con este graficador, de tal manera que se le pueda dar una interpretación coherente y organizada con los capítulos anteriores a cada modelo cosmológico FRW.
- **Capítulo IV: Propuesta de implementación en los cursos de Astronomía y tópicos afines.**
- En este capítulo se brinda una propuesta de implementación de aula enfocada a los estudiantes de Astronomía y tópicos afines con el fin de establecer una relación más directa entre los estudiantes, los conceptos manejados en estos cursos y los modelos generados en Gnuplot. De esta forma, algunos conceptos serán comprendidos y apropiados de una forma más didáctica, al establecer relaciones entre los conceptos y el uso real que

se le puedan dar a los mismos a través de Gnuplot. La propuesta contará con las actividades, objetivos de trabajo, materiales y tiempos de ejecución plasmados en matrices de aula que servirán de soporte y guía al estudiante, que a futuro desee desarrollar la propuesta de implementación de aula que en este capítulo se contempla.

## **METODOLOGÍA:**

- Para la realización de la presente monografía, se llevo a cabo una metodología estructurada basada en tres ejes principales de trabajo, los cuales son:
- Modelo matemático: Reconstruir los desarrollos matemáticos; desarrollos, que son fundamentales en la comprensión de la evolución de las nuevas teorías y posturas científicas en cosmología moderna sobre el modelo cosmológico estándar.
- Desarrollo del software (gnuplot): Aplicar los resultados trabajados en los modelos matemáticos en el graficador Gnuplot, de tal manera que se convierta en un fuerte aliado en la enseñanza de la Astronomía y tópicos afines.
- Planteamiento de la estrategia de aula: Plantear una propuesta de implementación de aula de tal manera que pueda ser llevada a cabo a futuro por estudiantes de Astronomía y tópicos afines.

## **CONCLUSIONES:**

- La ecuación de campo de Einstein y la métrica FRW son la base del origen de la ecuación FRW para la cual cada solución es considerada como un modelo cosmológico.
- La representación en Gnuplot de los modelos cosmológicos tipo FRW de la Teoría General de la Relatividad debe estar sujeta a las condiciones iniciales del universo las cuales en principio no se obtienen directamente de los textos como si ocurre con los valores de los parámetros cosmológicos actuales, sino que deben ser obtenidas a partir de análisis matemáticos exhaustivos con el fin de que las representaciones gráficas sean efectivas.
- A pesar de que el valor de la constante cosmológica predicho por la era inflacionaria es bastante grande  $\Lambda \sim 10^{54} \text{cm}^{-2}$ , se debe considerar que la aceleración de la expansión del universo y la explicación de los datos fotométricos de los cuásares arrojan un valor de  $\Lambda \sim 2 \times 10^{-56} \text{cm}^{-2}$ . Por tanto, al ser una constante cosmológica su valor debe permanecer invariante, ya

que si se trabaja con dos valores el predicho por la inflación y el predicho por observaciones astronómicas recientes,  $\Lambda$  pierde la calidad de constante y los resultados arrojados en las simulaciones no concuerdan con los modelos predichos por la teoría.

- Los modelos I, III y VI exigen que el tiempo final el cual se encuentra dentro del rango de condiciones iniciales temporales, sea condicionado por el tamaño real teórico sugerido por la era Guth o sea, un tamaño de aproximadamente  $3 \times 10^{23}$  o  $2 \times 10^{23}$  veces más grande que el universo observado. Esta aproximación en el factor de 1023 se da por las aproximaciones efectuadas en los cálculos.
- El modelo cosmológico que más se ajusta a la visión actual del universo es un modelo con características  $k = 0$ ;  $\Lambda > 0$ , un universo plano en expansión acelerada causada por el efecto de la energía oscura la cual está asociada a la constante cosmológica.
- La propuesta de implementación de aula sirve como instrumento pedagógico que da lugar a una contextualización más elaborada entre lo teórico y lo práctico en el entendimiento de la cosmología FRW gracias al uso del graficador Gnuplot por parte de los estudiantes en donde identifican y modifican los parámetros cosmológicos correctos para comprender los modelos de universo generados.

#### **AUTOR DEL RESUMEN ANALÍTICO.**

- Yony Leonardo Papagayo Melgarejo  
Revisado por el director del trabajo de grado:  
Yesid Javier Cruz Bonilla.

Bogotá, Febrero de 2011.