

Facultad de Ciencia y Tecnología Departamento de Física 2006



Una colisión de alta energía

Análisis del Efecto Compton a través de diagramas de Minkowski

Lina Viviana Melo Niño Alberto Rafael Osorio



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA de educadores



Oscar Armando Ibarra Russi Rector

Alejandro Álvarez Gallego Vicerrector Académico

Mario Ballesteros Mejía Vicerrector Administrativo y Financiero

Gerardo Andrés Perafán Echeverri Vicerrectora de Gestión Universitaria

Facultad de Ciencia y Tecnología Departamento de Física

Steiner Valencia Jefe de Departamento

Enseñanza de las Ciencias desde una Perspectiva Cultural **Línea de profundización**

María Mercedes Ayala Supervisión de contenido

Juan Carlos Bustos Coordinador editorial

© Universidad Pedagógica Nacional

© Lina Viviana Melo Niño Alberto Rafael Osorio

Imagen de portada Diagrama espacio-tiempo, para una colisión entre un electrón "libre" y un fotón.

Artículos publicados en diferentes medios escritos y referenciados en cada uno de los textos.

Preparación editorial

Universidad Pedagógica Nacional Fondo Editorial Luis Eduardo Vásquez Salamanca **Coordinador**

Impreso en Bogotá, Colombia. Primer semestre de 2007

Una colisión de alta energía:

Análisis del Efecto Compton a través de diagramas de Minkowski

Introducción	4
Referentes históricos sobre el Efecto Compton	4
Análisis físico-matemático de la colisión fotón-electrón	5
Conclusión	9
Bibliografía	10
Biografía	11

Presentación

Con la publicación de estos cuadernillos se pone de relieve la importancia de la socialización de las ideas en el campo de las ciencias y su enseñanza. Actividad que resulta pertinente y significativa en la formación de las nuevas generaciones de maestros de ciencias, en la medida en que contribuye al fortalecimiento de la docencia y la investigación en educación. En concordancia con la filosofía de la Universidad Pedagógica Nacional que aporta a la sociedad investigadores en pedagogía desde campos disciplinares específicos, quienes en su futura práctica profesional tendrán que afrontar los retos y circunstancias diversos, y en ocasiones difíciles, que el entorno social le plantea a la educación en nuestro país.

En este marco, la serie Pre-Impresos es una iniciativa editorial del Proyecto de Comunicación y Publicaciones del Departamento de Física, que está dirigida a la comunidad académica en general y que tiene como propósito divulgar la producción intelectual de los estudiantes, en la que se destacan sus experiencias y reflexiones respecto a los temas propios de su quehacer disciplinar y pedagógico. Invitamos a la comunidad estudiantil a participar en este espacio de divulgación, en el cual no hay restricción alguna en cuanto al formato, número de páginas o tema, con la salvedad de aquellos que estén fuera de los intereses propios de la actividad del Departamento

Información:

Departamento de Física Tels.: (57) (1) 347 11 90



Una colisión de alta energía: Análisis del Efecto Compton a través de diagramas de Minkowski

Lina Viviana Melo Niño Alberto Rafael Osorio Departamento de Física Universidad Pedagógica Nacional lina_viviana_melo@yahoo.com alberto_rafael@hotmail.com

Resumen

Son muchos los contenidos de la física que se pueden abordar a través de la Relatividad Especial; no obstante, el efecto Compton es uno de los más sobresalientes, puesto que al igual que el efecto fotoeléctrico, abordado por Einstein, permite pensar nuevamente en la naturaleza corpuscular de la radiación, tan abandonada durante varios siglos, debido a las ideas imperantes de Huygens respecto a la naturaleza ondulatoria de la luz. En este texto se propone una manera de analizar el Efecto Compton, resaltando la necesidad de plantear los diagramas espacio-temporales de Minkowski a la hora de realizar la descripción del fenómeno, ya que ellos nos han permitido sustentar todo el análisis matemático realizado, y nos han llevado a reflexionar sobre la importancia de reconocer los procesos de geometrización y formalización en física, organizadores de una manera de disponer nuestra visión de mundo.

Introducción

Cada vez que nos enfrentamos a nuevos fenómenos, en función de generar alguna explicación sobre ellos, surge la necesidad de vincularlos a las organizaciones cognitivas ya establecidas, y en esta actividad intentamos perfeccionar tales organizaciones o plantear algunas nuevas.

Éste es el caso de la introducción de Einstein de la hipótesis del "cuanto de luz", apoyado por observaciones que involucraban el comportamiento y las interacciones de la materia y la radiación, como el efecto fotoeléctrico, o la fotoluminiscencia, que reafirman la convicción de que los efectos presenciados no podían ser contemplados por una sola visión de la luz, concebida como onda electromagnética, y era necesario retornar a la idea de estructura granular, mediada siempre por "una visión completa del mundo que está en concordancia con el principio de relatividad"¹.

Una prueba contundente y de carácter experimental sobre el comportamiento corpuscular de la luz es el Efecto Compton, que es interpretado como la colisión entre un cuanto de luz (fotón) y un electrón "libre".

Como resultado de dicha colisión, el "fotón difundido" posee una energía menor y, por tanto, una longitud de onda mayor que la del fotón incidente"². Además, la energía de dispersión del fotón depende única y exclusivamente del ángulo de dispersión.

En este texto se realizará una descripción de este efecto, resaltando que sólo es necesario considerar los elementos organizadores de la Teoría de la Relatividad Especial para dar cuenta del fenómeno: un marco de referencia inercial desde el cual se construye el fenómeno a trabajar, la conservación del cuadrivector momento-energía del sistema, y la introducción de la representación geométrica mediante los diagramas de Minkowski para la colisión fotón-electrón.

Estas consideraciones permiten consolidar el análisis físico-matemático de la colisión entre fotón y electrón, y nos han permitido optar por una mirada diferente a la presentada en los textos consultados, en los que a los procesos algebraicos se les atribuye mayor importancia, abandonando la reflexión continua sobre la imagen a la cual se remite, desde el punto de vista geométrico, cada "procedimiento" que se efectúa y sus implicaciones físicas.

A manera de introducción, se presentarán en principio aspectos que permiten abordar el contexto determinante desde el cual se efectúa el análisis que se propone, como los intentos por retornar a la idea de estructura granular de la luz, el principio de relatividad y el límite finito de la información, como elementos organizadores dentro de la teoría de la relatividad especial.

Referentes históricos sobre el Efecto Compton

En 1906, Arthur Holly Compton y Peter Debye, trabajando con rayos X, ampliaron por separado la idea de Einstein del "fotón como portador de momento", descubriendo que la dispersión de fotones a partir de electrones podía explicarse tratando a los fotones como partículas puntuales con energía *bf* y momento $\frac{bf}{c}$, y suponiendo que las leyes de conservación de la energía y la conservación del momento para el par fotón–electrón se cumplen durante y después del choque.

La física clásica explicaba la dispersión de rayos X a partir de electrones de la siguiente manera:

¹ EINSTEIN, A. On the Inertia of Energie Required by the Relativity Principle. Collected Papers, vol. 2, doc. 45 pp. 414-415

² FRENCH, A. P. (1991) *Relatividad especial*. Barcelona: Editorial Reverté. pp. 222-223.



Ondas electromagnéticas incidentes de frecuencia f_0 deben acelerar a los electrones, obligándolos a oscilar y a volver a radiar a una frecuencia $f < f_0$

Para la física clásica la frecuencia o la longitud de onda de la radiación dispersada debe depender de:

- Cuánto se expuso la muestra a la radiación incidente.
- · La intensidad de la radiación.

No obstante, esta explicación fracasó cuando Compton demostró "experimentalmente" que el corrimiento de la longitud de onda de los rayos X dispersados a un ángulo determinado es absolutamente independiente de la intensidad de la radiación y de la duración de la exposición. Según sus estudios, éste depende únicamente del ángulo de dispersión (figura1). A diferencia de esa concepción clásica, la física cuántica explica la frecuencia de dispersión inferior f de manera corpuscular, afirmando que el fotón incidente transfiere una parte de su energía al electrón de retroceso.

Con este breve panorama histórico, se busca resaltar esa necesidad de retornar a la idea de luz como corpúsculo debido a los hechos experimentales trabajados por Compton y Debye, entre otros.



Figura 1.

Análisis físico-matemático de la colisión fotón-electrón

Hemos mencionado que los resultados de Compton respecto al aumento en la longitud de onda de la radiación dispersada dependía exclusivamente del ángulo de dispersión; esto se puede observar en la formulación matemática de sus resultados experimentales.

Para reconstruir el análisis y llegar a la ecuación que relaciona la longitud de onda con el ángulo de dispersión, es necesario tener en cuenta desde un comienzo los principios físicos que guiarán todo el desarrollo:

- Principio de conservación del cuadrivector momento-energía
- Invarianza de los cuadrivectores.

De igual manera nos referiremos constantemente a los diagramas de Minkowski para extraer de ellos la información que contienen, lo cual nos permite construir el camino para la descripción de los eventos.

Antes de presentar los diagramas, empecemos por describir la situación. Las figuras 1 y 2 ilustran los acontecimientos que se analizarán:

se tiene un electrón libre (e) en reposo y un fotón (F) que viaja justo en dirección hacia el electrón (como se aprecia en la figura 1). Al cabo de un tiempo (t) chocan, produciéndose una variación en la dirección de desplazamiento del fotón y una puesta en movimiento del electrón (figura 2). Esto, por supuesto, podemos representarlo en un diagrama espacio-tiempo de Minkowski (figura 3).





Desde el sistema de referencia laboratorio E0: Salida del fotón del tubo de rayos X en *t=0* E1: Electrón en reposo a una distancia *d* del fotón en *t-0* E2: Choque del fotón–electrón

Figura 3. Diagrama espacio-tiempo

La línea de mayor grosor corresponde a la líneade mundo del fotón (contenida en la superficie del cono) y la de menor grosor corresponde a la del electrón. Teniendo en cuenta los principios de conservación postulados inicialmente y la invarianza de los cuadrivectores, tendremos entonces que el cuadrivector momento–energía del sistema se conserva, es decir, que su magnitud es siempre la misma antes y después del choque; esto nos exige de igual forma que sus componentes espaciales y temporal se conserven de la misma manera.

Con lo expuesto anteriormente, se hace posible plantear la siguiente relación:

$$\vec{P}_{ea} + \vec{P}_{fa} = \vec{P}_{ed} + \vec{P}_{fd}$$

La expresión (1) representa la igualdad de la suma de los cuadrivectores momento-energía del fotón y electrón antes y después del suceso. Para ver más claro esto, fijémonos en los siguientes diagramas de momentoenergia, en los que se puede apreciar perfectamente que la magnitud del cuadrivector momento–energía es la misma, a pesar de que las componentes espaciales y temporales varíen entre una gráfica y la otra. Si superponemos las dos gráficas observaremos cómo la longitud del cuadrivector es "exactamente la misma" (figura 4).



Figura 3. Diagrama momento-energía

La línea negra representa el cuadrivector momento–energía total del sistema, la línea azul, el cuadrivector momento–energía del electrón, y la línea roja el cuadrivector momento–energía del fotón.

Pre-Impresos

Analicemos ahora cada uno de los cuadrivectores moméntum para el fotón y el electrón antes y después de la colisión³.

Para el electrón:

Antes del choque

$$\vec{P}_{ea} = \left(\frac{E_{0ea}, 0}{c}\right)_{\text{entonces}}$$
(2)

$$\left|\vec{P}_{ea}\right|^2 = \left(\frac{E_{0ea}, 0}{c}\right)^2 = \frac{E_{0ea}}{c^2}$$
(3)

$$Después del choque
\vec{P}_{ed} = \left(\frac{E_{ed}}{c}, \vec{P}_{ed}\right)$$

$$\left|\vec{P}_{ed}\right|^2 = \left(\frac{E_{ed}}{c}\right)^2 - P_{ed}^2$$
(5)

Por la invarianza de los cuadrivectores, después de la colisión:

$$|\vec{P}_{ed}| = \left(\frac{E_{ed}}{c}\right)^2 - P_{ed}^2 = \frac{E_{0ea}^2}{c^2}$$
 (6)

Donde E^2_{0ea} es la energía del electrón antes del choque, la cual es igual a su energía en reposo, y E_{ed} es la energía del electrón después del choque.

Ahora para el fotón:

Antes del choque

$$\vec{P}_{fa} = \left(\frac{E_{fc}}{c}, P_{fa}\right)$$
 entonces (7)

$$\left|\vec{P}_{fa}\right|^{2} = \left(\frac{E_{fc}}{c},\right)^{2} - P_{fa}^{2} = 0$$
 (8)

Después del choque
$$\vec{P}_{fd} = \left(\frac{E_{fd}}{c}, \vec{P}_{fd}\right)$$
 entonces

$$\left|\vec{P}_{fd}\right|^{2} = \left(\frac{E_{fd}}{c}\right)^{2} - P_{fd}^{2} = 0$$
 (10)

(9)

llega a:

Es claro que la línea de mundo del fotón está siempre sobre la superficie del cono, tal como vemos en los diagramas, puesto que su velocidad siempre será *c*, por tanto, la magnitud del cuadrivector momento para el fotón es cero (nos es imposible conocer el valor de la masa en reposo del fotón). Así, se deduce que para el fotón se cumple la siguiente relación:

$$\frac{E_f}{c} = P_f \tag{11}$$

Ahora que ya sabemos las componentes del cuadrivector podemos trabajar con la parte espacial y temporal. Si nos fijamos en la imagen de los acontecimientos (figura 2), veremos que hay componentes para el momento, tanto en $x e y \circ x_1 y x_2$ para el electrón, como para el fotón después del choque.

Vectorialmente tendríamos lo siguiente:



Por conservación y usando la ley de los cosenos, se

$$\overline{|P_{ed}|} = P^2_{fa} + P^2_{fd} - 2P^2_{fa}P^2_{fd}\cos\varphi$$
(12)

³ En todo el análisis tengamos en cuenta que los subíndices *ea, ed, fa, fe,* corresponden al electrón antes y después, e igualmente para el fotón antes y después.

Ya que el cuadrivector momento-energía se conserva, también se conserva, su parte espacial y temporal, de tal forma que se exige que:

$$E_{fa} + E_{0ea} = E_{fd} + E_{ed} \tag{13}$$

Es claro que la energía del electrón, después del choque, aparte de poseer energía en reposo, tiene ahora energía cinética K que sería:

$$E_{fa} + E_{0ea} = E_{fd} + E_{0ea} + K$$
 (14)

donde

$$E_{fa} - E_{fd} = K$$

Como en el caso del fotón E = fd, entonces,

$$c\left(P_{fa}-P_{fd}\right)=K$$
(15)

Volviendo al cuadrivector momento-energía, observamos la relación intrínseca que tiene las componentes del momento y energía que hemos trabajado anteriormente,

$$\left|\vec{P}_{ed}\right|^2 = \left(\frac{E_{fd}}{c}\right)^2 - P_{ed}^2,$$

ahora, si amplificamos por c^2 y se despeja P_{ed}^2 , que ya conocemos, tenemos:

$$c\left(\vec{P}_{ed}^{2}\right) = \left(E_{0e} + K\right)^{2} - E^{2}_{0e}$$
 (16)

Desarrollando el polinomio y simplificando la expresión se obtiene:

$$c^{2}P_{ed}^{2} = E_{0e}^{2} + 2E_{0e}K + K^{2} - E_{0e}^{2}$$
⁽¹⁷⁾

Sabemos que E_{0e} podemos expresarla como $m_{0e}c^2$ (donde m_{0e} es la masa en reposo del electrón), con lo cual se tiene:

$$P_{ed}^2 = 2m_{0e}K + \frac{K^2}{c^2}$$
 (18)

Si sustituimos P_{ed}^2 y *K* que ya los conocemos, se obtiene:

$$2P_{fa}P_{fd} - 2P_{fa}P_{fd}\cos\varphi = 2m_{0e^c}\left(P_{fa} - P_{fd}\right)$$

$$\frac{1}{m_{0e^{\ell}}}(1-\cos\varphi) = \frac{1}{P_{fd}} - \frac{1}{P_{fa}}$$
(19)

Dado que nos interesa conocer de qué depende la energía de dispersión del fotón, expresaremos el momento en términos de la energía:

$$\frac{1}{m_{0e^{\epsilon}}}(1-\cos\varphi) = c\left(\frac{1}{E_{fd}} - \frac{1}{E_{fa}}\right)$$
(20)

de allí que,

ó

$$\frac{1}{m_{0e^{c}}}(1-\cos\varphi) + \frac{1}{E_{fd}} - \frac{1}{E_{fa}}$$
(21)

o mejor,

$$E_{fa} = \frac{E_{fa}}{\frac{1}{m_{0e^{c}}^{2}}(1 - \cos\varphi) + E_{fa}}$$
(22)

De esta forma, hemos encontrado que la energía de dispersión del fotón, es decir, la energía del fotón después de la interacción con el electrón, depende única y exclusivamente del ángulo de dispersión, y de igual forma la frecuencia, debido a que E=hf además que:

$$\vec{P}$$
 total del sistema = $\left(\frac{E_{0ea}}{c} + \frac{E_{fa}}{c}, \frac{E_{fa}}{c}\right)$

De acuerdo con lo anterior podemos ver que los datos experimentales (gráfica 1) encuentran una explicación satisfactoria al considerar la radiación de naturaleza corpuscular. Por ejemplo, para $\varphi=0^{\circ}$ la Eincidente= Edispersada, o cuando $\varphi=180^{\circ}$, la Eincidente es máxima.



Conclusión

Una forma decisiva para entender la función o la importancia de los diagramas de Minkowski en el desarrollo de la relatividad especial se consigue en la medida en que éstos sean utilizados en la explicación y descripción de fenómenos y eventos "concretos".

Nuestra experiencia como estudiantes nos ha mostrado que la manera en que comúnmente se muestran los diagramas de Minkowski en los textos de enseñanza de la relatividad especial, se reduce a la divulgación de un capítulo particular en el que su gran importancia deja de retomarse al terminar dicho capítulo y difícilmente son utilizados en el desarrollo de situaciones posteriores. Sucesos como el anterior no propician razones de peso en el estudiante que lo convenzan del desarrollo geométrico involucrado cuando se piensa en eventos en el marco de la relatividad especial, aun cuando estas imágenes constituyen una forma de enfatizar y generar claridad de pensamiento.

Por otro lado, podemos decir que la posibilidad de revisar las ideas sustentadas desde la física clásica, en cuanto al corrimiento de longitud de onda de la radiación dispersada, se debe a los resultados experimentales obtenidos de las experiencias realizadas con rayos X a inicios del siglo XX, precedidos por Compton y Debye, entre otros.

De esta manera, razones como la dependencia del tiempo de exposición de la muestra a la radiación incidente, o intensidad de la radiación para dar cuenta de la frecuencia o la longitud de onda de la radiación dispersada, comienza a presentar serias dificultades. Entonces, para sustentar la idea de que la radiación incidente sea igual a la dispersada, se debe reconocer la dependencia de éstas con el ángulo de dispersión, resultados que podemos inferir también de la figura 5. Dicha gráfica está en términos de energía de fotones dispersados en relación con el número de fotones dispersados, y debido a las relaciones entre energía y frecuencia, y frecuencia y longitud de onda, podremos hablar indistintamente de estas cantidades cuando se realice la interpretación de la gráfica. La existencia de los dos picos está relacionada con la existencia de dos longitudes de onda, una de ellas la incidente, y otra, la dispersada, además de la dependencia del ángulo con la longitud de onda dispersada.

El primer pico de derecha a izquierda determina la radiación incidente, la cual es de una frecuencia mayor, por tanto, la longitud de onda es menor que la del segundo pico, la cual determina la radiación dispersada, donde la frecuencia de radiación difundida es menor que la incidente, y en consecuencia, la longitud de onda es mayor que la radiación incidente.



Figura 5. Tomada de TAYLOR, Edwin. WHEELER, John. (1992). *Spacetime Physics*. New York: W. H Freeman and Company.

Afirmaciones como la anterior también pueden desprenderse del resultado obtenido en la expresión 21, por ejemplo, si en tal expresión consideramos que $\varphi = 0^{o}$, podemos concluir que la $E_{incidente} = E_{dispersada}$, resultado que se evidencia en el primer cuadro de la figura 5.

Con lo anterior, se puede concluir que el fenómeno Efecto Compton ha sido descrito completamente, ya que la teoría, interpretada desde la relatividad especial, haciendo uso de los diagramas de Minkowski, los cuales han permitido sustentar todo el análisis matemático realizado, puede confirmarse con los resultados experimentales recopilados en la figura 5, realizados por Compton y Debye entre otros.

Bibliografía

TAYLOR, Edwin. WHEELER, John. (1992). *Spacetime Physics*. New York: W. H Freeman and Company. p. 312

FRENCH, A. P. (1991). *Relatividad especial*. Barcelona: Editorial Reverté. p. 331





Biografía

Arthur Holly Compton

El físico norte americano fue uno de los pioneros de la física de alta energía. En 1927 recibió el premio Nobel en física por sus estudios sobre dispersión de fotones de alta energía por electrones, el cual llegó a ser conocido como el Efecto Compton. Este trabajo fue reconocido como una prueba experimental en cuanto a que la radiación electromagnética posee ambas propiedades como onda y como partícula, y colocó un fundamento sólido para la nueva física "cuántica". Todos los experimentos en curso del Observatorio de Rayos Gamma Compton contaron con el detallado conocimiento de las interacciones de rayos gamma con materia, que Compton en principio describió

En sus primeros días en Princeton, Compton generó un método elegante para demostrar la rotación de la tierra, pero pronto comenzó sus estudios sobre rayos X. Desarrolló una teoría de la intensidad de reflexión de rayos X desde cristales como un medio de estudio de los arreglos de electrones y átomos, y en 1918 estudió la dispersión de rayos X.

El trabajo de Compton a inicios de la década del veinte sobre la dispersión de fotones a alta energía continuó mientras estuvo a la cabeza del Departamento de Física en la Universidad de Washington, en St. Louis.

Esto le permitió, en 1922, encontrar un incremento en la longitud de onda de los rayos X, debido a la dispersión de la radiación inicial por electrones libres, lo cual implica que el cuanto dispersado tiene menos energía que el cuanto del rayo inicial. Este efecto, hoy en día se conoce como en Efecto Compton. Fue después comprobado por C. T. R. Wilson quien, en su cámara de niebla, mostraría la presencia de los rayos de los electrones de retroceso.

Después, Compton fue a la Universidad de Chicago, donde inició el estudio de rayos cósmicos. Durante la Segunda Guerra Mundial desempeñó un papel importante en el proyecto de la bomba atómica como director del Laboratorio



de Metalurgia de la Universidad de Chicago. Al final de la Guerra, regresó a la Universidad de Washington como Chancellor y se retiró de allí en 1953. Murió el 15 de marzo de 1962, en Berkeley, California.

Algunos de las publicaciones de Compton son: *Secondary Radiations Produced by X-rays* (1922), *X-Rays and Electrons* (1926), *X-Rays in Theory and Experiment* (con S. K. Allison, 1935), *The Freedom of Man* (1935), *On Going to College (et al.*, 1940), y *Human Meaning of Science* (1940).

Para ampliar la información sobre la biografía de Compton, puede consultar; http:/ArthurH_Compton-Biografy.htm

Sobre los Autores

Lina Viviana Melo Niño: Egresada de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional, pertenece a la línea de investigación Física y Cultura, subgrupo Análisis Histórico-Crítico. Ha asistido a diferentes encuentros y congresos organizados por la Universidad, como: XIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y Primer Encuentro de Aritmética, 2002. XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y Tercer Encuentro de Aritmética; 2004. VI Simposio Sobre la Enseñanza de las Ciencias en la Educación Básica y Media. Políticas Educativas y Nuevo Orden Escolar, 2004. Congreso Nacional de Enseñanza de la Física, 2004. Asimismo, ha participado activamente en las monitorías académicas ofrecidas por el Departamento de Física desde 2004. Actualmente estudia la Especialización en Ciencias para el Nivel Básico, y trabaja en el Gimnasio Fontana.

Alberto Rafael Osorio: Egresado de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional, pertenece a la línea de investigación Física y Cultura, subgrupo Análisis Histórico-Crítico. Ha participado como ponente en diversos eventos organizados por la Universidad, como Congreso Nacional de Enseñanza de la Física, 2004 y el VI Simposio Nacional de Enseñanza de las Ciencias, entre otros. De igual forma, laboró para la Universidad por medio de monitorías académicas, en especial en el área de electromagnetismo, cálculo diferencial e integral. Actualmente trabaja como docente en la Facultad de Ingenieria de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

www.pedagogica.edu.co