

# Pre•Impresos

Estudiantes

1

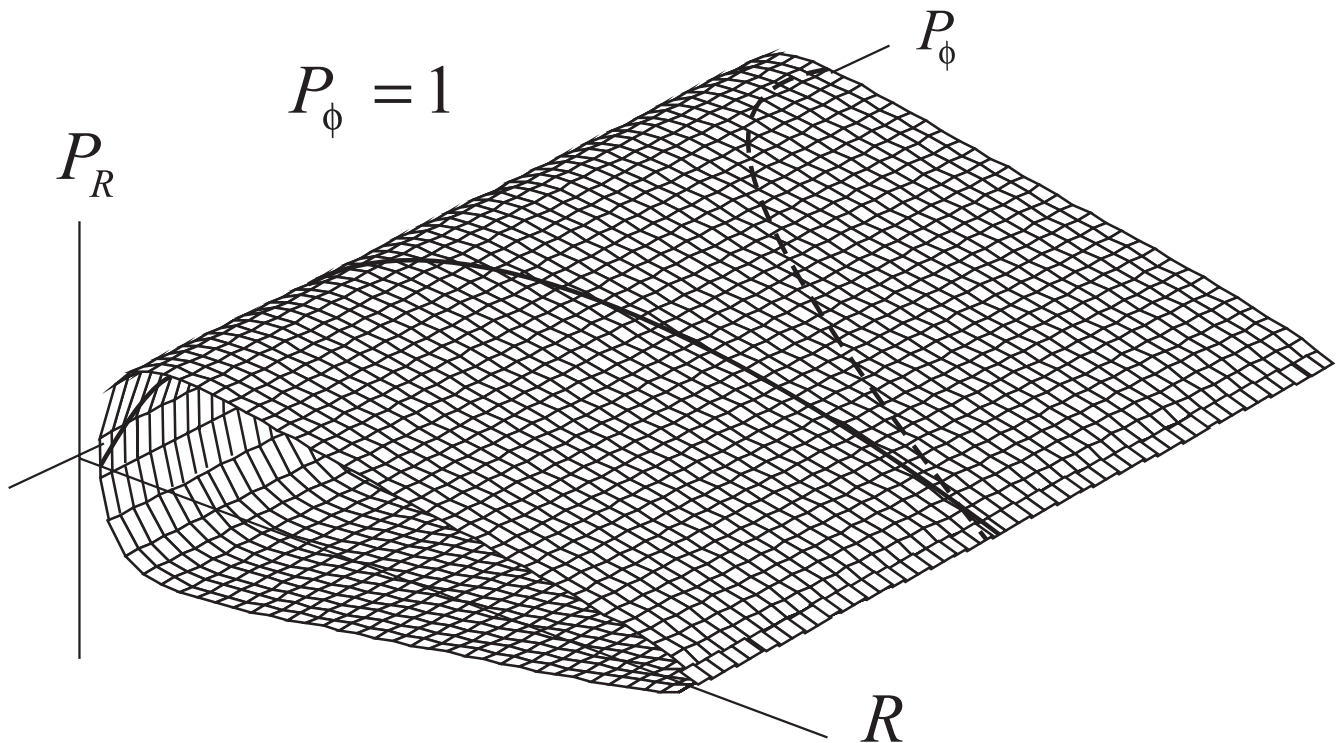
Facultad de Ciencia y Tecnología Departamento de Física 2006

## Tratamiento del caso de los dos cuerpos

desde la mecánica de Hamilton

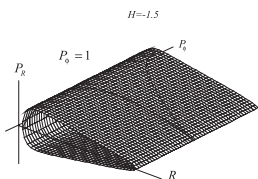
Mauricio Medina Gamba

$$H = -1.5$$



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*



# Pre·Impresos **1**

Estudiantes

Oscar Armando Ibarra Russi  
**Rector**

Alejandro Álvarez Gallego  
**Vicerrector Académico**

Mario Ballesteros Mejía  
**Vicerrector Administrativo y Financiero**

Gerardo Andrés Perafán Echeverri  
**Vicerrectora de Gestión Universitaria**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**  
**Departamento de Física**

Steiner Valencia  
**Jefe de Departamento**

Enseñanza de las Ciencias  
desde una Perspectiva Cultural  
**Línea de profundización**

María Mercedes Ayala  
**Supervisión de contenido**

Juan Carlos Bustos  
**Coordinador editorial**

© Universidad Pedagógica Nacional

© Mauricio Medina Gamba

## Imagen de portada

Línea de evolución del estado del sistema contenida en la superficie definida por el Hamiltoniano específico  $H = -1,5$  en el espacio de fases  $P_R, P_\psi, R$

Artículos publicados en diferentes medios escritos y referenciados en cada uno de los textos.

## Preparación editorial

Universidad Pedagógica Nacional  
Fondo Editorial  
Luis Eduardo Vásquez Salamanca  
**Coordinador**

Impreso en  
**Bogotá, Colombia**  
**Primer semestre de 2007**

## Tratamiento del caso de los dos cuerpos

desde la mecánica de Hamilton

<b>Presentación</b>	<b>4</b>
<b>Sistema</b>	<b>5</b>
Caracterización del sistema	<b>5</b>
<b>Estado del sistema</b>	<b>7</b>
Estado de Configuración	<b>7</b>
Estado de Movimiento	<b>8</b>
<b>Evolución del estado del sistema</b>	<b>11</b>
La función lagrangiana	<b>11</b>
La función hamiltoniana	<b>12</b>
Ecuaciones de Hamilton	<b>13</b>
<b>Geometrización</b>	<b>15</b>
Espacio de fases	<b>15</b>
Campos vectoriales	<b>15</b>
Líneas de evolución	<b>16</b>
Funciones que se conservan durante la evolución del estado del sistema	<b>16</b>
Potencial Efectivo	<b>18</b>
Diagramas de fase	<b>18</b>
<b>Conclusión</b>	<b>30</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>31</b>
<b>Biografía</b>	<b>31</b>

## Presentación

Con la publicación de estos cuadernillos se pone de relieve la importancia de la socialización de las ideas en el campo de las ciencias y su enseñanza. Actividad que resulta pertinente y significativa en la formación de las nuevas generaciones de maestros de ciencias, en la medida en que contribuye al fortalecimiento de la docencia y la investigación en educación. En concordancia con la filosofía de la Universidad Pedagógica Nacional que aporta a la sociedad investigadores en pedagogía desde campos disciplinares específicos, quienes en su futura práctica profesional tendrán que afrontar los retos y circunstancias diversos, y en ocasiones difíciles, que el entorno social le plantea a la educación en nuestro país.

En este marco, la serie Pre·Impresos es una iniciativa editorial del Proyecto de Comunicación y Publicaciones del Departamento de Física, que está dirigida a la comunidad académica en general y que tiene como propósito divulgar la producción intelectual de los estudiantes, en la que se destacan sus experiencias y reflexiones respecto a los temas propios de su quehacer disciplinar y pedagógico. Invitamos a la comunidad estudiantil a participar en este espacio de divulgación, en el cual no hay restricción alguna en cuanto al formato, número de páginas o tema, con la salvedad de aquellos que estén fuera de los intereses propios de la actividad del Departamento

## Información:

Departamento de Física  
Tels.: (57) (1) 347 11 90

# Tratamiento del caso de los dos cuerpos

## desde la mecánica de Hamilton

**Mauricio Medina Gamba**  
Universidad Pedagógica Nacional  
Departamento de Física  
mauriciomedg@hotmail.com

### Resumen

Así como en la mecánica newtoniana una vez conocidas todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, es posible dar cuenta de su dinámica por medio de la Segunda Ley, de forma similar en la mecánica hamiltoniana es posible conocer la dinámica del sistema

por medio de las ecuaciones de Hamilton, después de conocer el hamiltoniano del sistema. En esta mecánica geometrizar la dinámica del sistema en un espacio de fases permitirá mostrar un panorama claro del significado de las ecuaciones y su solución.

## Presentación

Este trabajo se realizó en la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional durante 2004, con base en las reflexiones realizadas en la cátedra Mecánica de Hamilton, Mecánica Cuántica y Caos, de la línea de profundización Enseñanza de las Ciencias desde una Perspectiva Cultural, dirigida por la profesora María Mercedes Ayala, en el segundo semestre de 2003, y en un primer escrito elaborado con el estudiante John Barragán. En este trabajo se aborda la mecánica hamiltoniana de manera diferente a como lo hacen los libros de texto de mecánica clásica; para ello, se tomó el caso de los dos cuerpos en interacción gravitacional, conocido ampliamente en el ambiente académico en física. Al tratarlo desde la visión hamiltoniana no solamente se obtendrá un estudio completo y exacto del mismo, sino que además se podrá desarrollar de forma clara y ejemplificada los conceptos fundamentales de esta representación de la mecánica, lo cual permite una mejor comprensión, que hace que las ecuaciones sean aun más significativas, en contraste con la forma tradicional en que otras perspectivas mecánicas como la newtoniana y la lagrangiana lo abordan, permitiendo al estudiante de física una aproximación más cualitativa a este tema.

El tratamiento del caso de los dos cuerpos desde la mecánica de Hamilton se realizará de la siguiente forma: en primer lugar, se abordará la noción de sistema y su caracterización, definiendo las partes que lo conforman, las ligaduras y los grados de libertad para el caso de los dos cuerpos. Posteriormente, la descripción del sistema estará limitado a atribuirle únicamente dos cualidades, las de configuración y movimiento, referentes al ámbito mecánico del mismo, excluyendo las demás cualidades como las de la termodinámica, entre otras. Tales cualidades susceptibles de ser pensadas en grados permiten

determinar el estado del sistema con un grado específico tanto de la cualidad de configuración como de la cualidad de movimiento del sistema, que estará representado a su vez por las variables de configuración y de movimiento. Después de definir el estado del sistema será importante dar cuenta de su evolución, por consiguiente se tendrá que construir tanto la función hamiltoniana encargada de regular los cambios de configuración con los cambios en el movimiento, como las ecuaciones de Hamilton que contienen la información de la dinámica del sistema o evolución.

El paso siguiente será poner en términos geométricos las ideas desarrolladas hasta el momento, de tal forma que se definirá un espacio de fases del sistema en el que residirán todos los posibles estados, provisto de una estructura definida por las ecuaciones de Hamilton. Además, se mostrará la solución de las ecuaciones de la dinámica por métodos numéricos para llegar a las líneas de campo o de evolución del sistema. Por último, se mostrará la importancia de los invariantes, la forma de hallarlos y la necesidad de su existencia para construir los diagramas de fases para observar la evolución del estado del sistema, finalizando el tratamiento del caso de los dos cuerpos desde la mecánica de Hamilton. Esta perspectiva mecánica se tuvo en cuenta debido a que constituye la base de los principios generales de la cuántica, por tal motivo será importante dar a conocer su formulación, pensando en la enseñanza de la física moderna. Otra razón para tomarla en consideración es que los sistemas dinámicos se han venido constituyendo en un área de especial interés en las últimas décadas, recuperando con ello la relevancia de los sistemas hamiltonianos y de perspectivas y problemas que habían quedado planteados en el contexto de la mecánica de Hamilton.

## Sistema

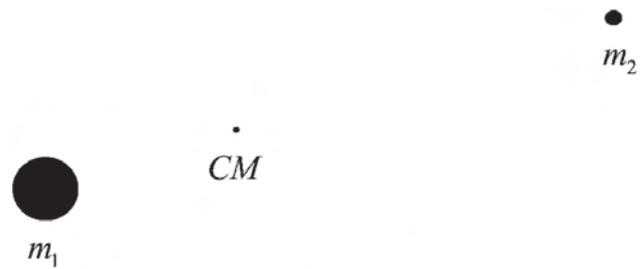
Así como en la mecánica newtoniana la partícula es fundamental, de igual forma lo es el sistema para la mecánica hamiltoniana, de tal forma que para el caso de los dos cuerpos será importante en un principio reflexionar sobre la definición de sistema, ya que los conceptos fundamentales se desarrollan en torno a la caracterización y el conocimiento de su dinámica.

### Caracterización del sistema

Usualmente se entiende por sistema el conjunto de partes que están relacionadas entre sí, de tal forma que su caracterización se limita a nombrar las partes que lo conforman y las relaciones que existen entre ellas; sin embargo, aquí se tendrá en cuenta además de las partes que componen el sistema, sus ligaduras y los grados de libertad como aspectos adicionales en su caracterización; por tanto, será importante exponer con más detalle cada uno de estos aspectos.

### Partes que lo conforman

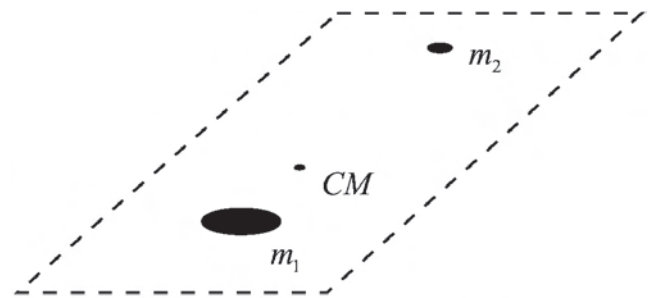
De acuerdo con lo anterior, en el caso de los dos cuerpos se toman las partículas con masas  $m_1$  y  $m_2$  como partes móviles del sistema en interacción gravitacional, pero además de las dos masas se considerará como parte del sistema el centro de masa del mismo, representado por  $CM$ , el cual, al tener en cuenta que la acción entre ellas es igual y opuesta, y que no hay, por tanto, una fuerza neta sobre el sistema. Será posible tomarlo como el origen del sistema de referencia en el que se hará la descripción de la configuración y el movimiento de las dos partículas (figura 1). Es importante anotar para la definición de sistema que se considera aislado, esto es, nada en el exterior puede interactuar con él en ningún momento.



(Figura 1)

### Ligaduras

Las partículas  $m_1$  y  $m_2$  son libres de moverse en el espacio tridimensional, pero debido a que las fuerzas entre ellas son centrales (en la dirección de la línea que las une), y que no hay fuerzas externas actuando sobre él, no existirá torque alguno sobre el sistema, de tal forma que tanto las partículas como el centro de masa estarán siempre en mismo plano (figura 2). Esta restricción constituye una ligadura del sistema y hace parte de su definición.



(Figura 2)

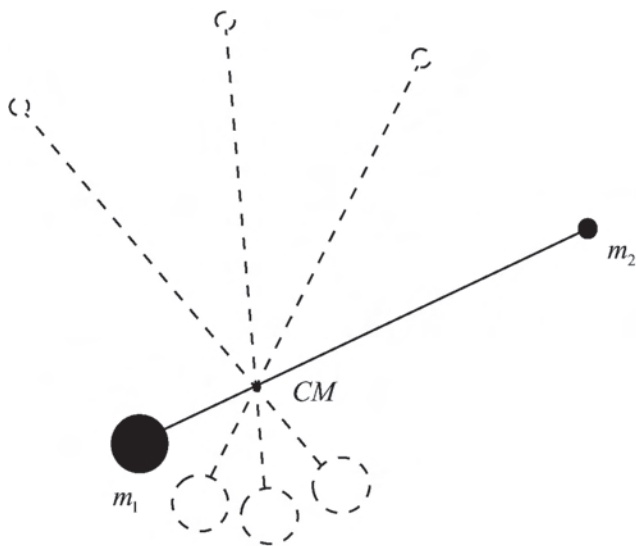
### Grados de libertad

Cuando se hace referencia a los grados de libertad del sistema se está pensando en el número de movimientos independientes que éste puede tener. Es claro que el sistema presenta muchas formas de mo-

vimiento, pero se puede pensar cualquiera de ellos como la superposición de dos movimientos simples e independientes. Así, por ejemplo, es posible asumir que la separación entre  $m_1$  y  $m_2$  se conserva, en cuyo caso se obtiene un movimiento de rotación como si el sistema fuera un cuerpo rígido (Figura 3).

Por otro lado, se puede pensar en otro movimiento del sistema cuando la línea (imaginaria) que une las masas  $m_1$  y  $m_2$  conserva su dirección, de modo que estas partículas únicamente podrán alejarse o acercarse (figura 4).

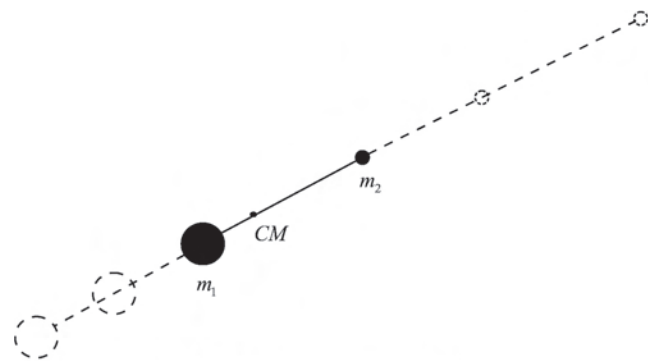
Los dos movimientos presentados anteriormente se dicen que son independientes, ya que el uno se puede dar sin la presencia del otro, esto es, se pue-



(Figura 3)

de dar el movimiento de rotación sin que la distancia entre las masas varíe y se puede dar el movimiento de las masas por la línea que las une sin presencia del movimiento de rotación. Es importante ver que estos son los dos únicos movimientos independientes que tiene el sistema, ya que cualquier otro movimiento posible puede ser pensado como combinación de los dos movimientos independientes. Si esto es así, se dice que el sistema de los dos cuerpos tiene dos grados de libertad.

Considerado todo lo anterior, se ha caracterizado el sistema, permitiendo así la posibilidad de centrarse en su ámbito mecánico.



(Figura 4)

## Estado del sistema

Después de haber caracterizado el sistema su descripción se limitará a definir cualidades referentes al ámbito mecánico, excluyendo otro tipo de posibles cualidades (como las de la termodinámica, por ejemplo). Así, la primera cualidad a tener en cuenta está referida a la disposición espacial o configuración del sistema, y la segunda, a su movimiento.

Como las cualidades pueden ser pensadas en grados, *la cualidad de configuración* está referida a todas las formas de disposición espacial posibles del sistema, de tal manera que cada forma de configuración puede ser asumida como un estado de configuración del sistema. Similarmente, un grado específico de *la cualidad de movimiento* podrá asumirse como un estado de movimiento del sistema. En consecuencia, el estado general del sistema en un momento dado estará referido simultáneamente al estado de configuración y al movimiento en ese momento.

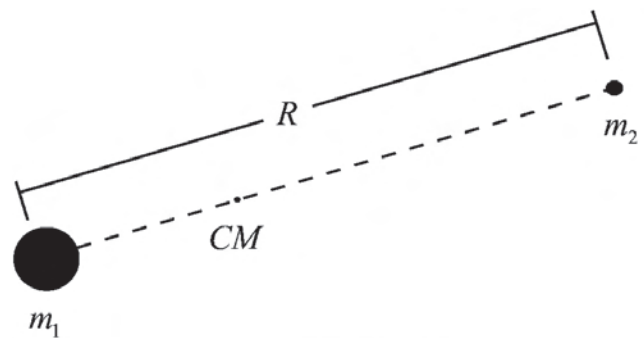
### Estado de Configuración

Como la cualidad de configuración del sistema está referida a todos los posibles estados de configuración, para caracterizarlos concretamente se tendrá que definir variables, de tal forma que para valores diferentes que puedan tomar especifiquen un estado de configuración diferente.

Estas variables que se deben definir son llamadas coordenadas espaciales del sistema, que son determinadas de la siguiente forma:

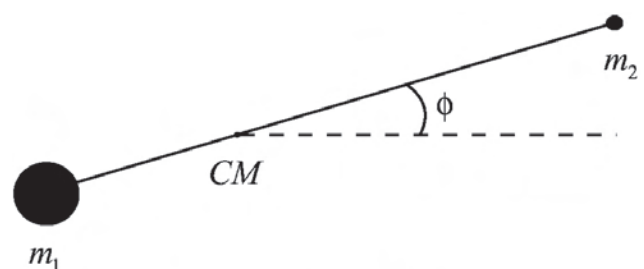
Primero: Debido a que el sistema tiene dos grados de libertad, a cada uno se le asociará una coordenada que caracterice esa forma de cambio de configuración, esto es: un grado de libertad como se veía an-

tes, hacía referencia al movimiento de las masas, en el que la línea que los une conservaba su dirección; este movimiento implica un cambio de configuración del sistema, que en este caso estará especificado completamente con la coordenada  $R$  indicando la separación entre  $m_1$  y  $m_2$  (figura 5).



(Figura 5)

Segundo: El otro grado de libertad hacía referencia al movimiento de rotación del sistema donde la separación entre las masas quedaba fija, este movimiento implica un cambio de configuración independiente al anterior, quedando bien especificado por un ángulo polar  $\phi$  (figura 6).



(Figura 6)

Debido a que los dos cambios de configuración son independientes, entonces las coordenadas  $(R, \phi)$  serán también independientes. Estas coordenadas

tomarán valores dentro de los intervalos  $0 < R < \infty$  y  $0 < \phi < 2\pi$ , de tal forma que si esto se cumple, especificarán completamente todos los estados posibles de configuración del sistema, debido a los valores posibles que pueden tomar dentro de estos intervalos.

## Estado de Movimiento

Como ya se mencionó en el acápite 3, todos los posibles estados de movimiento definen la cualidad de movimiento del sistema, entonces, de igual forma que en el estado de configuración, se tienen que definir variables que caractericen este estado. Estas variables dinámicas se conocen como los "momentos generalizados", que son a su vez los movimientos independientes experimentados por el sistema.

Si bien es cierto, aunque el movimiento implica cambios de configuración del sistema no quiere decir que se deba reducir o sustituir por este mismo; la idea es pensar el movimiento como una cualidad independiente susceptible de ser medida sin tener que remitirse necesariamente a los cambios de configuración.

Teniendo en cuenta lo anterior, debido a que el número de movimientos independientes del sistema son dos, las variables dinámicas correspondientes serán representadas por  $P_R$  y  $P_\phi$  que son los momentos generalizados independientes asociados a las coordenadas  $R$  y  $\phi$  respectivamente. Es decir, al referirse a la variable dinámica  $P_R$ , se está pensando en el movimiento del sistema cuando varía la coordenada  $R$ , permaneciendo fija la coordenada  $\phi$ ; similarmente para la variable dinámica  $P_\phi$ , se está pensando en el movimiento del sistema cuando la coordenada  $\phi$  cambia permaneciendo fijo  $R$ .

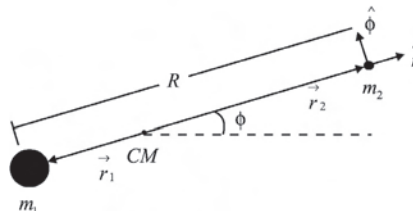
Por tanto, considerando lo anterior, se llega a una expresión explícita para los momentos generalizados<sup>1</sup>:

$$P_R = \mu \dot{R} \quad P_\phi = \mu R^2 \dot{\phi}$$

Es primordial anotar que tanto las coordenadas como los momentos generalizados, aunque son independientes entre sí, son funciones del tiempo. Entonces, el estado general del sistema estará representado por el vector  $(R(t), \phi(t), P_R(t), P_\phi(t))$ . Lo importante ahora será determinar la forma como están regulados los cambios en el tiempo del estado general del sistema, esto es, determinar  $(\dot{R}(t), \dot{\phi}(t), \dot{P}_R(t), \dot{P}_\phi(t))$ .

<sup>1</sup> Se procederá a hallar las expresiones para  $P_R$  y  $P_\phi$

Debido a que las partículas están sujetas a una mutua interacción gravitacional, el movimiento relativo de estas dos masas es equivalente al movimiento relativo de una partícula de masa igual a la masa reducida bajo la misma interacción gravitacional. La masa reducida es igual a  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , recordando que  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de cada una de las partículas del sistema. Si se considera  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  las posiciones de  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, con relación a  $CM$ , estos vectores posición cambiarán tanto en magnitud como en dirección al variar las coordenadas  $R$  y  $\phi$  (figura 7). Como la masa  $m_2$  es menor que  $m_1$ ,  $CM$  estará más cerca de  $m_1$  que de  $m_2$ , de tal forma que las posiciones de las partículas son tales que la ubicación del centro de masa dada por la expresión  $\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  sea igual a cero debido a que es tomado como marco de referencia.



(Figura 7)



Colocando  $\vec{r}_2 = r \hat{r}$ , donde  $r$  es la distancia de  $m_2$  a  $CM$ , siendo  $\hat{r}$  la dirección de  $\vec{r}_2$  y de igual forma  $\vec{r}_1 = -sr \hat{r}$ , donde  $sr$  es la distancia de  $CM$  a  $m_1$ , siendo  $s = \frac{m_2}{m_1}$ ,  $-\hat{r}$  implica que  $r_1$  está en la misma dirección que  $r_2$ , pero en sentido contrario. De tal forma que  $r_1$  y  $r_2$  expresados así cumplen con la condición de ubicación del centro de masa.

Entonces  $R = r(1+s) = r\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)$ , de esta expresión despejando  $r$  y sustituyendo en los vectores posición, teniendo en cuenta además la expresión de la masa reducida se deduce:

$$\vec{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1} R \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2} R \hat{r}.$$

De esta forma los vectores posición quedan en función de las coordenadas independientes. Entonces, es posible tener una expresión explícita del cambio de configuración del sistema cuando  $R$  varía y  $\phi$  permanece fijo, esto es:

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial R} = -\frac{\mu}{m_1} \hat{r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial R} = \frac{\mu}{m_2} \hat{r}$$

Ahora se puede expresar el segundo cambio de configuración cuando  $\phi$  cambia permaneciendo fijo  $R$ , esto es:

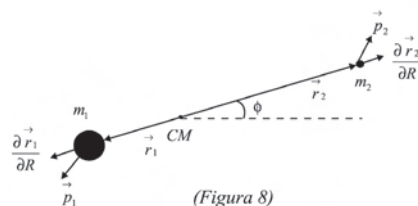
$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \phi} = \frac{\mu R}{m_1} \hat{\phi} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \phi} = \frac{\mu R}{m_2} \hat{\phi}$$

Donde  $\hat{\phi}$  es un vector unitario perpendicular a  $\hat{r}$  que indica la dirección de aumento del ángulo  $\phi$ .

Por otro lado, si el sistema se encuentra en un estado de movimiento cualquiera, el movimiento de la masa  $m_1$  respecto a  $CM$  está dado por  $\vec{p}_1 = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} = m_1 \left( \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \phi} \dot{\phi} \right)$ ; reemplazando los términos de cambio de configuración se obtiene  $\vec{p}_1 = \mu(-\dot{R}\hat{r} + R\dot{\phi}\hat{\phi})$ , procediendo de igual forma se halla el movimiento de  $m_2$  respecto a  $CM$  el cual es:  $\vec{p}_2 = \mu(\dot{R}\hat{r} + R\dot{\phi}\hat{\phi})$

El movimiento del sistema  $P_R$  asociado a la coordenada  $R$  es la suma de la proyección de los movimientos  $p_1$  y  $p_2$  de cada una de las partes móviles del sistema en la dirección del cambio de configuración cuando  $R$  varía y  $\phi$  permanece fijo (figura 8), esto es:

$$P_R = p_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial R} + p_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial R}$$

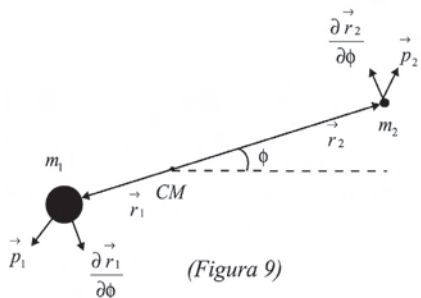


Reemplazando las cantidades conocidas se llega a:

$$P_R = \mu \dot{R}$$

De manera similar, cuando  $\phi$  varía permaneciendo fijo  $R$ , el momento  $P_\phi$  asociado a  $\phi$  (figura 9) está dado por:

$$P_\phi = p_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \phi} + p_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \phi}$$



Reemplazando obtenemos

$$P_\phi = \mu R^2 \dot{\phi}$$

Es importante recordar que  $\dot{R} = dR / dt$  y  $\dot{\phi} = d\phi / dt$  denotan los cambios de configuración en el tiempo.

Si todo el sistema se asume como una sola partícula con masa reducida  $\mu$ , la expresión para  $P_R$  indicaría el momento lineal de esa partícula, y la expresión para  $P_\phi$  expresaría la magnitud del momento angular respecto a  $CM$ , de donde la expresión  $\mu R^2$  representaría el momento de inercia de ésta.

## Evolución del estado del sistema

Se ha visto que el estado del sistema está representado por las coordenadas  $(R(t), \phi(t), P_R(t), P_\phi(t))$  en cada instante. Debido a que el sistema evoluciona en el tiempo, es claro que su estado también lo hace, pero ese cambio de estado del sistema se hace de tal forma que un cambio en su configuración necesariamente implica un cambio en su movimiento, o un cambio en su movimiento también implica necesariamente un cambio en su configuración. Por tal motivo, debe existir una función que regule o asocie estos cambios, a tal función se le denomina el hamiltoniano<sup>2</sup> del sistema, que será abordada en el acápite 4.2.

### La función lagrangiana

Una forma de llegar al hamiltoniano es partir de la función lagrangiana del sistema. El lagrangiano<sup>3</sup>, representado por  $L$ , es la función reguladora de los cambios de configuración del sistema, de tal forma que sólo dependerá de la configuración y de sus cam-

bios en el tiempo, es decir, es función de  $(R, \phi, \dot{R}, \dot{\phi})$ ; además está definido como la diferencia de la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $U$  del sistema.

La energía cinética del sistema debida a los cambios de configuración se debe entender como la suma de las energías cinéticas de las partículas móviles que la conforman. Por tanto, la expresión de la energía cinética<sup>4</sup> del sistema estará dada por:

$$T = \frac{1}{2} \mu (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2)$$

Por otro lado, la energía de configuración del sistema o energía potencial  $U$ , que en este caso será la energía gravitacional, está dada por  $U = \frac{-Gm_1m_2}{R} = -\frac{k}{R}$ , donde  $k = Gm_1m_2$ , siendo  $G$  la constante de gravitación. Esta energía potencial independiente del tiempo disminuye cuando  $m_1$  y  $m_2$  se acercan, y tiende a cero su máximo valor, cuando se alejan (gráfica 1).

<sup>2</sup> De ahora en adelante siempre que se haga uso de la frase “el hamiltoniano”, se tiene que pensar en la función de hamilton del sistema.

<sup>3</sup> La frase “el lagrangiano” hace referencia a la función lagrangiana del sistema.

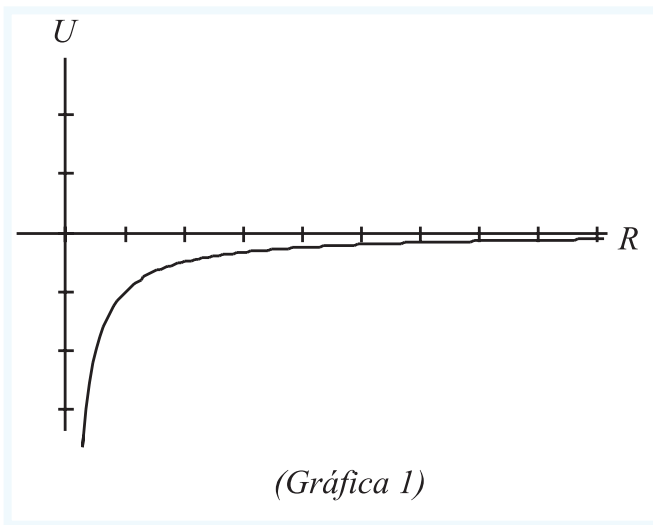
<sup>4</sup> Como la energía cinética del sistema está dada como la suma de las energías cinéticas de cada una de sus partes móviles, entonces tenemos:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2$$

Donde  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son las velocidades de  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente con relación a  $CM$ , de acuerdo a esto tenemos:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \left( -\frac{\mu}{m_1} \dot{R} \hat{r} + \frac{\mu R}{m_1} \dot{\phi} \hat{\phi} \right) \cdot \left( -\frac{\mu}{m_1} \dot{R} \hat{r} + \frac{\mu R}{m_1} \dot{\phi} \hat{\phi} \right) = \frac{\mu^2}{m_1^2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2)$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \left( \frac{\mu}{m_2} \dot{R} \hat{r} + \frac{\mu R}{m_2} \dot{\phi} \hat{\phi} \right) \cdot \left( \frac{\mu}{m_2} \dot{R} \hat{r} + \frac{\mu R}{m_2} \dot{\phi} \hat{\phi} \right) = \frac{\mu^2}{m_2^2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2)$$



Teniendo en cuenta lo anterior, el lagrangiano se puede expresar como:

$$L(R, \phi, \dot{R}, \dot{\phi}) = T - U = \frac{1}{2} \mu (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2) + \frac{k}{R}$$

## La función hamiltoniana

La función hamiltoniana, representada por  $H$ , como se dijo anteriormente, asocia a cada cambio de configuración un cambio en el movimiento; dependerá tanto de la configuración como del movimiento del sistema, esto es  $H = H(R, \phi, P_R, P_\phi)$ . Así, del hamiltoniano se obtiene información más completa de la evolución del sistema en su estado general referente a la configuración y el movimiento, en comparación

con el lagrangiano, que únicamente da cuenta de la evolución del sistema en su configuración.

## El hamiltoniano como una transformada de Legendre

El hamiltoniano se puede obtener del lagrangiano del sistema por medio de la transformada de Legendre<sup>5</sup>. Debido a que el lagrangiano  $L$  depende de las coordenadas  $(R, \phi, \dot{R}, \dot{\phi})$ , la función hamiltoniana  $H$  será esa nueva función con nuevas coordenadas  $(R, \phi, P_R, P_\phi)$ ; en este caso la transformada de Legendre se escribe de la siguiente forma:

$$H(R, \phi, P_R, P_\phi) = P_R \dot{R} + P_\phi \dot{\phi} - L = P_R \dot{R} + P_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} \mu (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2) - \frac{k}{R}$$

Teniendo en cuenta las expresiones de los momentos generalizados<sup>6</sup> hallados anteriormente, esto es  $P_R = \mu \dot{R}$  y  $P_\phi = \mu R^2 \dot{\phi}$ , despejando tanto  $\dot{R}$  como  $\dot{\phi}$  reemplazando en la transformada de Legendre se obtiene el hamiltoniano, esto es:

$$H(R, \phi, P_R, P_\phi) = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\phi^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R}$$

La expresión  $\frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\phi^2}{2\mu R^2}$  del hamiltoniano da cuenta de la energía de movimiento del sistema, que en comparación con el término correspondiente  $\frac{1}{2} \mu (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2)$  en el lagrangiano, que es responsable de los cambios en el tiempo de la configuración del sistema, no tiene

reemplazando en la energía cinética se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \mu^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2)$$

Teniendo en cuenta que  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  se llega a la expresión:

$$T = \frac{1}{2} \mu (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2)$$

Es interesante ver que si se asume el sistema como una partícula con masa  $\mu$ , el término de la energía cinética  $\frac{1}{2} \mu \dot{R}^2$  es debida a la traslación de esa partícula, y el otro término  $T = \frac{1}{2} \mu R^2 \dot{\phi}^2$  no es más que la energía de rotación respecto a  $CM$  de esa partícula.

<sup>5</sup> La transformada de Legendre de una función  $f(x)$  es una nueva función  $g$  de una nueva variable  $\rho$ , donde  $\rho = f'(x)$  que se construye de la siguiente forma:

en cuenta su movimiento. Por otro lado, el último término  $-\frac{k}{R}$  del hamiltoniano, sigue siendo la energía potencial o de configuración del sistema.

## Ecuaciones de Hamilton

Como el hamiltoniano asocia a cada cambio de configuración un cambio en el movimiento, debido a que el sistema es conservativo, tales cambios son iguales y opuestos de tal forma que el cambio total es nulo.

Para poder expresar explícitamente la idea anterior, se debe establecer una medida común a la hora de comparar cantidades diferentes como lo son estos cambios. Para lograr esto, se hace necesario considerar el trabajo realizado por el sistema cuando cambia su configuración y el trabajo realizado cuando cambia su movimiento. Debido a que el sistema es conservativo el trabajo total es nulo, lo que implica que en todo momento se conserva el hamiltoniano o energía del sistema; esto es:

$$dH = \dot{R} dP_R + \dot{\phi} dP_\phi - (\dot{P}_R dR + \dot{P}_\phi d\phi) = 0 \quad (I)$$

La expresión  $\dot{R} dP_R + \dot{\phi} dP_\phi$  es el trabajo realizado por el sistema debido a los cambios infinitesimales  $dP_R$  y  $dP_\phi$  en el movimiento. Similarmente la expresión

$-(\dot{P}_R dR + \dot{P}_\phi d\phi)$  es el trabajo efectuado por el sistema, debido a cambios infinitesimales  $dR$  y  $d\phi$  de configuración.

Teniendo en cuenta lo anterior, la medida común de comparación está expresada por  $dH$  que representa el cambio infinitesimal de energía del sistema que en este caso se conserva, esto es  $dH=0$ . Como el hamiltoniano, es una función de las variables de estado, la diferencial se cumple:

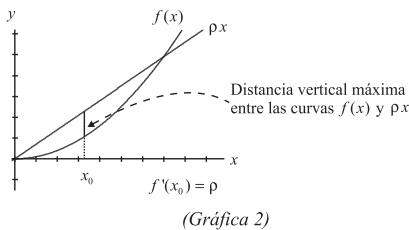
$$dH = \frac{\partial H}{\partial R} dR + \frac{\partial H}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial H}{\partial P_R} dP_R + \frac{\partial H}{\partial P_\phi} dP_\phi$$

Comparando esta expresión con (I), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{\partial H}{\partial P_R} & \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial P_\phi} \\ \dot{P}_R &= -\frac{\partial H}{\partial R} & \dot{P}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales son las ecuaciones de Hamilton, que contienen toda la información de la dinámica del sistema.

Así como en la mecánica newtoniana una vez conocidas todas las fuerzas que interactúan sobre la partícula, la información de su dinámica está conte-



Sea  $f$  una función convexa, esto es  $f''(x) > 0$ , partiendo de la gráfica de  $f$  en el plano  $x, y$ , se considerará la recta  $y = \rho x$ . Para cada valor de la pendiente  $\rho$ , existe un punto  $x_0 = x_0(\rho)$  donde la distancia vertical entre las dos curvas  $\rho x - f(x) = F(\rho, x)$  es máxima; esta condición se expresa como:  $\frac{\partial F}{\partial x} = \rho - f'(x) = 0$  y se cumple para un  $x_0$ , donde  $f'(x_0) = \rho$ ; es claro que  $x_0 = x(\rho)$  (gráfica 2). La transformada de Legendre de  $f(x)$ , que se representará por  $g$ , será igual a  $F(\rho, x)$  en el punto  $x = x(\rho)$

para todo valor de la pendiente donde se cumpla la condición extremal  $\rho - f'(x) = 0$ ; así la nueva función está escrita como  $g(\rho) = F(\rho, x(\rho)) = \rho x - f(x)$ , donde  $\rho = f'(x)$ .

<sup>6</sup> Partiendo de la condición extremal que se debe cumplir para la función  $H(R, \phi, P_R, P_\phi) = P_R \dot{R} + P_\phi \dot{\phi} - L$ , las cuales son  $P_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \mu \dot{R}$  y  $P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu R^2 \dot{\phi}$ ; terminan siendo una forma diferente de obtener las expresiones de los momentos generalizados.

nida en la Segunda Ley  $\vec{F} = m \vec{a}$ ; de manera similar en este caso, una vez conocido el hamiltoniano del sistema, la información de su dinámica se encuentra en las ecuaciones de Hamilton. Para el sistema de los dos cuerpos éstas serán:

$$\dot{R} = \frac{P_R}{\mu} \quad \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{\mu R^2} \quad \dot{P}_R = \frac{P_\phi^2}{\mu R^3} - \frac{k}{R^2} \quad \dot{P}_\phi = 0$$

En el siguiente acápite se pondrán en términos geométricos las ideas expuestas hasta el momento.

## Geometrización

La forma en que la mecánica hamiltoniana describe con exactitud la dinámica del sistema es haciendo geometría sobre el espacio de fases. Así, geometrizar la dinámica del sistema permite de cierta manera conocer cómo es la evolución de su estado general en todo momento.

### Espacio de fases

El espacio de fases del sistema de los dos cuerpos, con dos grados de libertad, es un espacio tetradiimensional, donde cada punto del espacio con coordenadas  $(R, \phi, P_R, P_\phi)$  representa un estado general del sistema. Debido a que  $R$  únicamente puede tomar valores positivos, donde el ángulo  $\phi$  varía de 0 a  $2\pi$  y los momentos  $P_R, P_\phi$  pueden tomar cualquier valor, tales requerimientos acotan el espacio de fases en una región donde es posible encontrar todos los estados que el sistema puede tomar en cualquier momento. Por tanto, siempre que se hable del espacio de fases del sistema, se tendrá que pensar en esa región donde residen los estados.

### Campos vectoriales

El espacio de fases del sistema está completamente estructurado por las ecuaciones de Hamilton. Debido a que contienen la información de la dinámica del sistema, ellas indican la dirección de evolución de su estado, esto es, las ecuaciones diferenciales de Hamilton conforman un campo vectorial en el espacio de fases del sistema. Tal campo vectorial puede ser expresado de la siguiente manera<sup>7</sup>:

$$\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\phi} \\ \dot{P}_R \\ \dot{P}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_R / \mu \\ P_\phi / \mu R^2 \\ \left( \frac{P_\phi^2}{\mu R^3} \right) - \left( \frac{k}{R^2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este campo vectorial asocia a cada estado un vector, que indica la dirección en la que se encuentra y la separación temporal del posterior estado a seguir. Por ejemplo, iniciando en uno de ellos<sup>8</sup>:

<sup>7</sup> En notación de vector columna, se pueden colocar las ecuaciones de Hamilton del sistema

$$\dot{R} = \frac{\partial H}{\partial P_R} = \frac{P_R}{\mu} \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi}{\mu R^2} \quad \dot{P}_R = -\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{P_\phi^2}{\mu R^3} - \frac{k}{R^2} \quad \dot{P}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0,$$

que representarán el campo vectorial en el espacio de fases.

<sup>8</sup> Los estados estaban representados por las coordenadas  $(R, \phi, P_R, P_\phi)$ , estas coordenadas de ahora en adelante serán expresadas en forma de vector columna

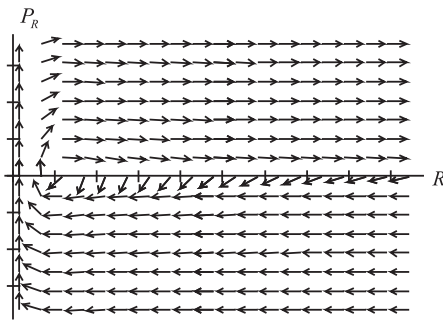
$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} R \\ \phi \\ P_R \\ P_\phi \end{pmatrix}, \text{ dando cuenta del mismo estado.}$$

$$\vec{\xi}_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ \phi_0 \\ P_{R_0} \\ P_{\phi_0} \end{pmatrix}$$

el campo vectorial le asocia el vector

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{\phi} \\ \dot{P}_R \\ \dot{P}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{R_0}/\mu \\ P_{\phi_0}/\mu R_0^2 \\ \left( P_{\phi_0}^2/R_0^3 \right) - \left( k/R_0^2 \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

que resulta de remplazar el estado inicial en las ecuaciones de Hamilton (gráfica 3).



(Gráfica 3)

En este diagrama se grafica

$$\begin{pmatrix} P_{R_0}/\mu \\ \left( P_{\phi_0}^2/R_0^3 \right) - \left( k/R_0^2 \right) \end{pmatrix} \text{ en los puntos } \begin{pmatrix} R \\ P_R \end{pmatrix}$$

que son tanto las proyecciones del campo vectorial como de los estados, respectivamente en el plano  $R$ - $P_R$  del espacio de fases del sistema, para un valor fijo de  $P_\phi$ .

## Líneas de evolución

En el acápite anterior se mostró cómo las ecuaciones de Hamilton definen un campo vectorial en el espacio de fases del sistema; ahora será importante saber qué representa su solución. Pero, como las ecuaciones de Hamilton del sistema de los dos cuerpos, conforman un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas, no lineales, (acápites 4.3), será complicado obtener soluciones analíticas, por consiguiente se debe recurrir a métodos numéricos para resolverlas.

## Método de Euler <sup>9</sup>

Escribiendo las ecuaciones de la dinámica en términos de incrementos finitos; esto es:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{P_R}{\mu} \quad \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{P_\phi}{\mu R^2} \quad \frac{\Delta P_R}{\Delta t} = \frac{P_\phi^2}{\mu R^3} - \frac{k}{R^2} \quad \frac{\Delta P_\phi}{\Delta t} = 0,$$

se puede partir de un estado inicial cualquiera

$$\vec{\xi}_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ \phi_0 \\ P_{R_0} \\ P_{\phi_0} \end{pmatrix}$$

para conocer el estado posterior del sistema se reemplaza el estado inicial en las ecuaciones, obteniendo<sup>10</sup>:

$$R = R_0 + \left( \frac{P_{R_0}}{\mu} \right) \Delta t \quad \phi = \phi_0 + \left( \frac{P_{\phi_0}}{\mu R_0^2} \right) \Delta t \quad P_R = P_{R_0} + \left( \frac{P_{\phi_0}^2}{\mu R_0^3} - \frac{k}{R_0^2} \right) \Delta t \quad P_\phi = P_{\phi_0}$$

de tal forma que el estado siguiente al inicial será:

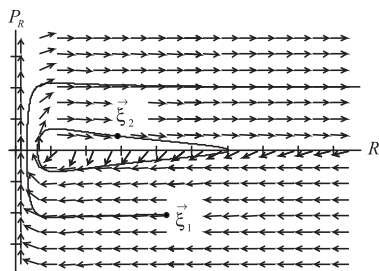
<sup>9</sup> El método de Euler es un método numérico de solución de sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

<sup>10</sup> Recordando los incrementos  $\Delta R = R - R_0$ ,  $\Delta \phi = \phi - \phi_0$ ,  $\Delta P_R = P_R - P_{R_0}$  y  $\Delta P_\phi = P_\phi - P_{\phi_0}$ , se reemplazan en las ecuaciones de Hamilton y despejando a su vez  $R$ ,  $\phi$ ,  $P_R$  y  $P_\phi$  de cada una de ellas.



$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} R \\ \phi \\ P_R \\ P_{\phi=} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 + \left(\frac{P_{R=}}{\mu}\right)\Delta t \\ \phi_0 + \left(\frac{P_{\phi=}}{\mu R_0^2}\right)\Delta t \\ P_{R0} + \left(\frac{P_{\phi0}}{\mu R_0^3} - \frac{k}{R_0^3}\right)\Delta t \\ P_{\phi0} \end{pmatrix} \quad (\text{II})$$

Para encontrar el estado posterior a (II), se realizará el mismo procedimiento que antes, pero se asumirá el estado (II) como el nuevo estado inicial. Procediendo de forma iterativa, se encontrará una sucesión de *puntos-estados* en el espacio de fases que estarán separados entre sí dependiendo del intervalo de tiempo  $\Delta t$  elegido, de tal forma que si se escoge el intervalo lo más pequeño posible, esa sucesión de estados conformarán una curva suave que se aproximará al camino o solución exacta por donde los estados del sistema pasarán después de partir del estado inicial  $\vec{\xi}_0$ . Esas curvas suaves que se obtienen por el procedimiento anterior, se conocen como las líneas integrales del campo vectorial o líneas de evolución del estado del sistema. Es importante anotar que el campo vectorial es tangente a las líneas de evolución, lo que implica que por un único estado mecánico pasa una sola línea integral (gráfica 4).



(Gráfica 4)

## Funciones que se conservan durante la evolución del estado del sistema

Si se tiene una función escalar  $F=F(R,\phi,P_R,P_\phi)$  definida en el espacio de fases del sistema, el cambio de esta función en el tiempo estará sometido a lo largo de las líneas de evolución del estado del sistema; esta idea se puede expresar explícitamente como la derivada direccional<sup>11</sup> de esta función en la dirección del campo vectorial definido por las ecuaciones de Hamilton.

Reemplazando las ecuaciones de Hamilton, se obtiene la derivada a lo largo del campo vectorial, esto es:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial R} \frac{\partial H}{\partial P_R} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial H}{\partial P_\phi} - \frac{\partial F}{\partial P_R} \frac{\partial H}{\partial R} - \frac{\partial F}{\partial P_\phi} \frac{\partial H}{\partial \phi} = \{F, H\}$$

A esta expresión también se le conoce como el Corchete de Poisson entre  $F$  y  $H$  denotado por  $\{F, H\}$  que es a su vez una nueva función definida en el espacio de fases, esta operación Corchete de Poisson, tiene el mismo sentido de la derivada direccional.

Las ecuaciones de Hamilton se pueden expresar en términos de los corchetes de Poisson, de la siguiente forma:

Proyecciones del campo vectorial y de dos líneas de evolución para dos estados iniciales  $\vec{\xi}_1$  y  $\vec{\xi}_2$  en el plano  $R$ - $P_R$  del espacio de fases. Se puede ver cómo el campo vectorial es tangente a las líneas de evolución, indicando a su vez el sentido de recorrido de las curvas.

<sup>11</sup> La derivada direccional en el espacio de fases es similar a la derivada direccional de una función en el espacio euclideo tridimensional, por ejemplo: sea  $g=g(x, y, z)$  una función definida en el espacio tridimensional tradicional, si se quiere hallar la derivada de  $g$  en la dirección  $\hat{e}$  (vector unitario en este espacio) denotado por  $\frac{dg}{ds}$  será igual a la proyección del gradiente de esta función en la dirección  $\hat{e}$ , esto es  $\frac{dg}{ds} = \nabla g \cdot \hat{e}$

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \{R, H\} & \dot{P}_R &= \{P_R, H\} \\ \dot{\phi} &= \{\phi, H\} & \dot{P}_\phi &= \{P_\phi, H\}\end{aligned}$$

Si se cumple  $\{F, H\}=0$  indicará que  $\dot{F}=0$ , lo que significa que la función  $F$  es una constante en la evolución del estado. Por tanto, con respecto a las funciones que se conservan en la dinámica, si se encuentra un número de éstas correspondiente a los grados de libertad del sistema, las ecuaciones de Hamilton son integrables<sup>12</sup>. Por tanto, como el sistema de los dos cuerpos tiene dos grados de libertad, entonces se debe encontrar dos funciones constantes para que las ecuaciones de Hamilton puedan ser integrables. La primera función constante en la evolución es  $P_\phi$ , momento generalizado del sistema, debido a que se cumple  $\dot{P}_\phi = \{P_\phi, H\} = 0$ . Por otro lado, la función hamiltoniana que representa la energía total del sistema, es la segunda función<sup>13</sup> que se conserva en la dinámica ya que  $\dot{H} = \{H, H\} = 0$ .

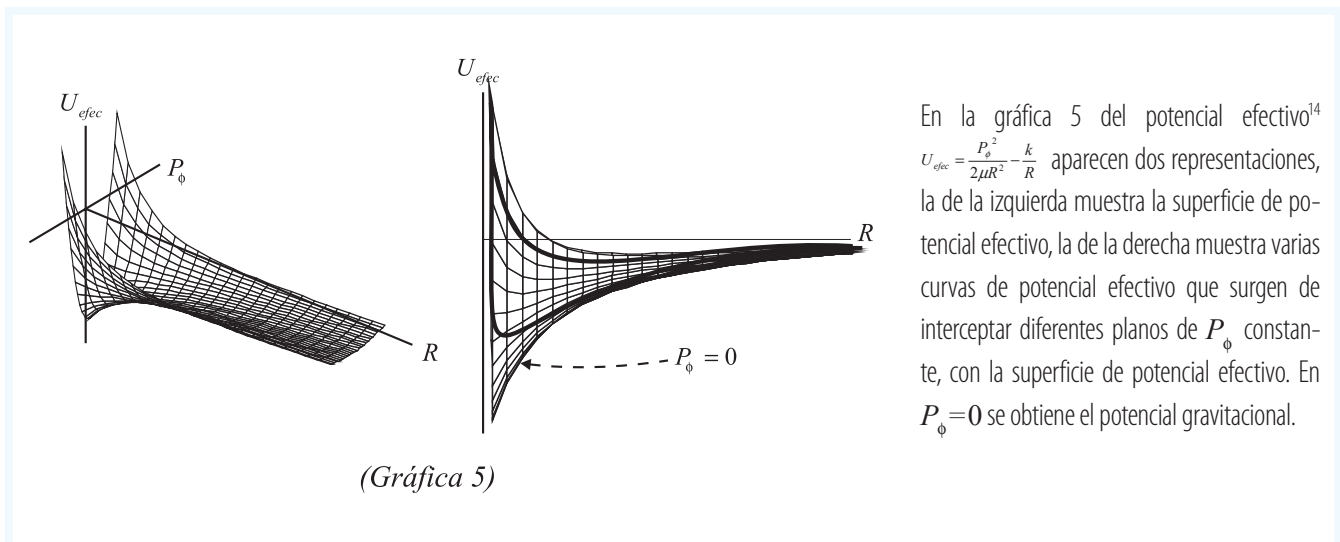
En los siguientes acápités, se mostrará la importancia de tener esas dos funciones que se conservan, en el momento de conocer la dinámica del sistema.

## Potencial Efectivo

Como la coordenada  $P_\phi$  es una constante en la evolución, puede tomar valores de  $-\infty$  a  $\infty$ . En el hamiltoniano  $H = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\phi^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R}$ , la expresión  $U_{efec} = \frac{P_\phi^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R}$  se conoce como el potencial efectivo del sistema que depende sólo de  $R$ , debido a que  $P_\phi$  es constante. Por tanto, es posible pensar la expresión  $\frac{P_R^2}{2\mu}$ , energía de movimiento, como si variara la coordenada  $R$  sin hacerlo  $\phi$  en el sistema.

## Diagramas de fase

El Hamiltoniano o energía total del sistema y el momento generalizado  $P_\phi$ , debido a su permanencia en la evolución del sistema, define dos planos perpendiculares entre sí en la gráfica del potencial efectivo (gráfica 6).

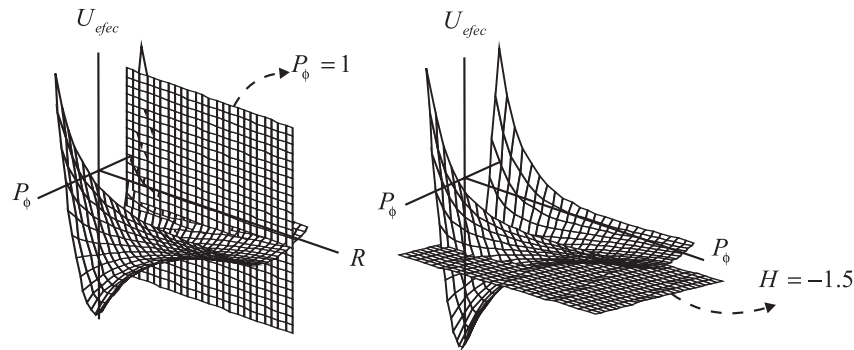


En la gráfica 5 del potencial efectivo<sup>14</sup>  $U_{efec} = \frac{P_\phi^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R}$  aparecen dos representaciones, la de la izquierda muestra la superficie de potencial efectivo, la de la derecha muestra varias curvas de potencial efectivo que surgen de interceptar diferentes planos de  $P_\phi$  constante, con la superficie de potencial efectivo. En  $P_\phi = 0$  se obtiene el potencial gravitacional.

<sup>12</sup> Teorema de Liouville.

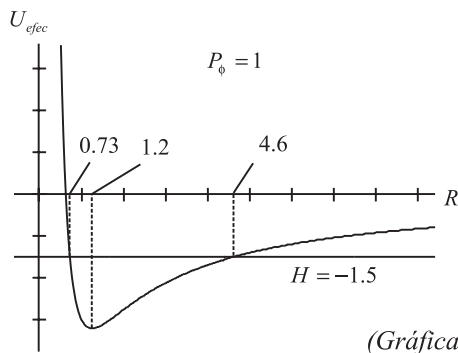
<sup>13</sup> Como  $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial H}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial H}{\partial P_R} \dot{P}_R + \frac{\partial H}{\partial P_\phi} \dot{P}_\phi$  reemplazando las ecuaciones de Hamilton se obtiene  $\{H, H\} = 0$

<sup>14</sup> Para la realización de las gráficas se considerará los siguientes valores de las constantes  $\frac{1}{2\mu} = 5 \text{ kg}^{-1}$ ,  $k = 8 \frac{\text{kgm}^3}{\text{s}^2}$



Gráfica del potencial efectivo interceptada por dos planos perpendiculares entre si definidos por  $H = -1.5$  y  $P_\phi = 1$

(Gráfica 6)



(Gráfica 7)

Curva del potencial efectivo inscrita en el plano definido por  $P_\phi = 1$ , con el nivel de energía  $H = -1.5$

### Caso 1: $H = -1.5$ y $P_\phi = 1$

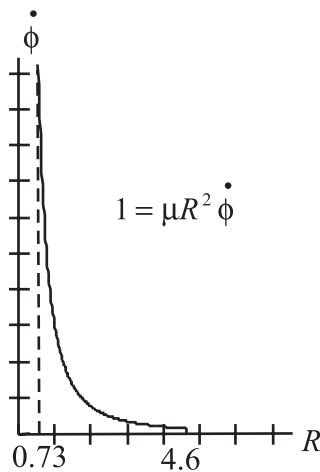
Debido a que se ha seleccionado como ejemplo el nivel de energía  $H = -1.5$  y momento<sup>15</sup>  $P_\phi = 1$ , los estados del sistema que cumplan con estas condiciones serán aquellos cuya coordenada  $R$  tome valores<sup>16</sup> dentro del intervalo 0.73 y 4.6, ya que fuera de éste el potencial efectivo será mayor que la energía total del sistema,  $\frac{P_R^2}{2\mu} < 0$ , lo que matemáticamente sería impensable (gráfica 7). El valor de la energía total del sistema  $H = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\phi^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R} = -1.5$  se debe distribuir en energía de movimiento y configuración, de tal forma que siempre se conserve el momento  $P_\phi = 1$  en toda la evolución. En el estado del sistema, donde la separación

entre las masas es  $R = 0.73$  el potencial efectivo  $U_{efec} = \frac{1^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R} = -1.5$  tiene el mismo valor del hamiltoniano  $H = -1.5$ , lo que implica que la energía  $\frac{P_R^2}{2\mu} = 0$ , y por tanto,  $\dot{R}$  se anula, ya que  $P_R = \mu \dot{R}$  (acápite 3.2). Como  $P_\phi = \mu R^2 \dot{\phi}$  (acápite 3.2) siempre es igual a 1, cuando  $R$  toma el valor mínimo,  $\dot{\phi}$  toma el valor máximo; así, en este punto el movimiento de rotación del sistema hace que las masas comiencen a separarse rápidamente permitiendo que de  $R = 0.73$  hasta  $R = 1.2$  la energía  $\frac{P_R^2}{2\mu}$  aumente a su máximo valor, mientras que el potencial efectivo disminuye a su mínimo valor. La coordenada  $R$  sigue aumentando lo que implica que el potencial efectivo desde este punto comienza a incrementarse, de tal forma que  $\frac{P_R^2}{2\mu}$ , energía de mo-

<sup>15</sup> Tanto  $H$  como  $P_\phi$  se miden en unidades de energía y momento, respectivamente.

<sup>16</sup> La coordenada  $R$  se mide en unidades de distancia.

vimiento, a partir de este valor empieza a disminuir hasta que se anule en  $R=4.6$ , cuando el potencial se iguala al hamiltoniano nuevamente. Al aumentar  $R$  debe disminuir  $\dot{\phi}$  de forma tal que  $P_{\dot{\phi}}=1$ , lo que indica que la velocidad  $\dot{\phi}$  del sistema se hace cada vez menor cuando  $R$  aumenta (gráfica 8).



(Gráfica 8)

Gráfica de  $1 = \mu R^2 \dot{\phi}$  dentro del intervalo donde está definido  $R$ , en el cual se muestra la disminución de la rotación del sistema  $\dot{\phi}$  cuando aumenta  $R$ .

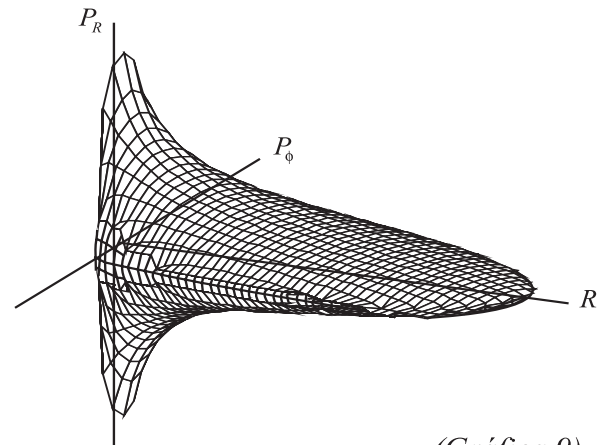
Posteriormente, las masas comienzan a acercarse pasando nuevamente por una separación de  $R=1.2$ , donde  $\frac{P_R^2}{2\mu}$  es máximo, hasta llegar al límite de acercamiento  $R=0.73$  en la cual  $\frac{P_R^2}{2\mu}=0$ , que debido a la rotación máxima en este punto de nuevo comienzan a separarse.

Se verá ahora qué significa en el espacio de fases, el hamiltoniano y el momento  $P_{\dot{\phi}}$  como invariantes en la evolución del estado del sistema.

Para un valor específico del hamiltoniano se define una hipersuperficie en el espacio de fases del sistema cuyos puntos-estados que la conforman cumplen con

ese valor de energía elegido. Así, para diferentes valores del hamiltoniano se estará definiendo una familia de hipersuperficies, que estratifican el espacio de fases.

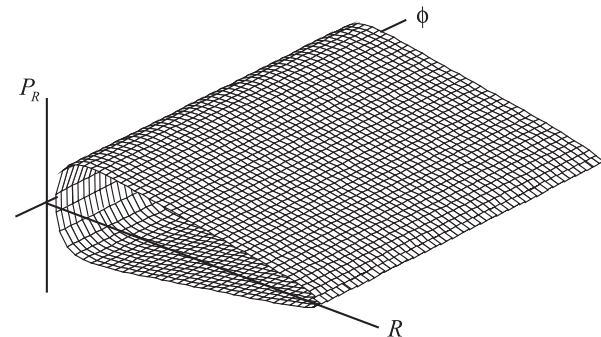
Retomando el valor del hamiltoniano anterior, se tienen las siguientes proyecciones<sup>17</sup> de la hipersuperficie definida por  $H=-1.5$  (gráficas 9 y 10).



(Gráfica 9)

Proyección de la hipersuperficie generada por el hamiltoniano  $H=-1.5$  en el espacio  $R, P_{\dot{\phi}}, P_R$ .

La ecuación es  $P_R = \pm \sqrt{-\frac{3}{10} \frac{P_{\dot{\phi}}^2}{R^2} + \frac{8}{5R}}$



(Gráfica 10)

Proyección en el espacio  $R, \phi, P_R$  de la hipersuperficie generada por el hamiltoniano  $H=-1.5$  con un valor  $P_{\dot{\phi}}=P_{\dot{\phi}_0}$  diferente de cero.

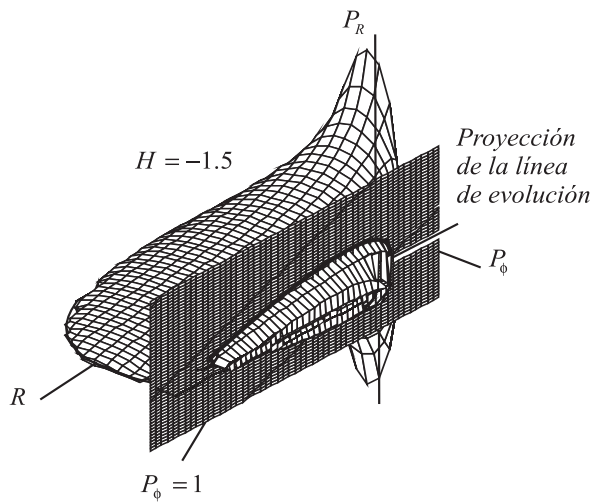
La ecuación es  $P_R = \pm \sqrt{-\frac{3}{10} \frac{P_{\dot{\phi}_0}^2}{R^2} + \frac{8}{5R}}$

<sup>17</sup> Debido a que la hipersuperficie se encuentra en el espacio de fases de cuatro dimensiones, lo único que se puede graficar son las proyecciones en el espacio tridimensional  $R, P_{\dot{\phi}}, P_R$  y  $R, \phi, P_R$ . Las ecuaciones de estas proyecciones se obtienen del hamiltoniano despejando la coordenada  $P_R$  y reemplazando el valor de energía elegido.

**Nota:** Para graficar la proyección de la hipersuperficie en el espacio  $R, \phi, P_R$ , se debe fijar un valor de  $P_\phi$  debido a que sobre esta superficie, como se verá más adelante, estará contenida la proyección de la línea de evolución del sistema que debe cumplir con la conservación de  $H$  y de  $P_\phi$ .

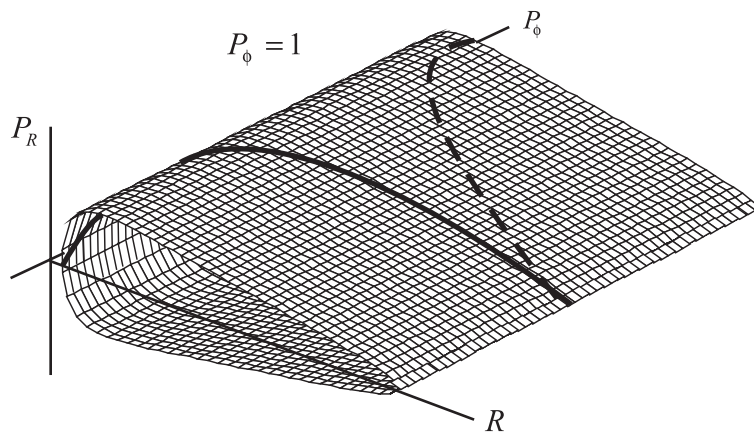
Ahora bien, si se tiene en cuenta que  $P_\phi$  se conserva en la evolución del sistema,  $P_\phi = 1$  definirá un hiperplano que cortará la hipersuperficie  $H = -1.5$ ; el resultado de este corte es una curva en el espacio de fases conformada por los estados del sistema que conservan los valores de  $P_\phi = 1$  y  $H = -1.5$  (gráficas 11a

y 11b), esta curva no es más que la línea de evolución que es solución de las ecuaciones de Hamilton. Si se tiene en cuenta el método de Euler (acápite 5.3.1), al escoger un estado inicial cualquiera contenido en esta curva, la sucesión de estados posteriores al inicial estarán lo más cerca de esta, dependiendo de que tan pequeño sea el  $\Delta t$  elegido. En general, la línea de evolución aproximada que se obtiene por el método numérico, deberá estar lo más cercano a la intersección de una hipersuperficie definida por un hamiltoniano y un hiperplano determinado por un  $P_\phi$ , indicando la conservación de tales magnitudes en la evolución.



(Gráfica 11a)

Proyecciones en el espacio  $R, P_\phi, P_R$  de la intersección de la hipersuperficie  $H = -1.5$  con el hiperplano  $P_\phi = 1$  y la línea de evolución que surge de esta intersección.

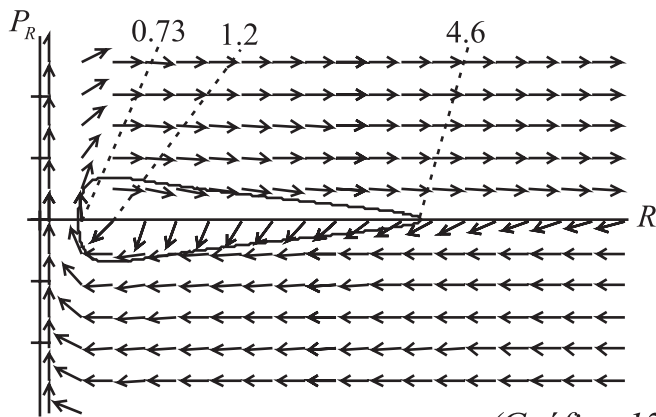


(Gráfica 11b)

Proyección de la línea de evolución en el espacio  $R, \phi, P_R$

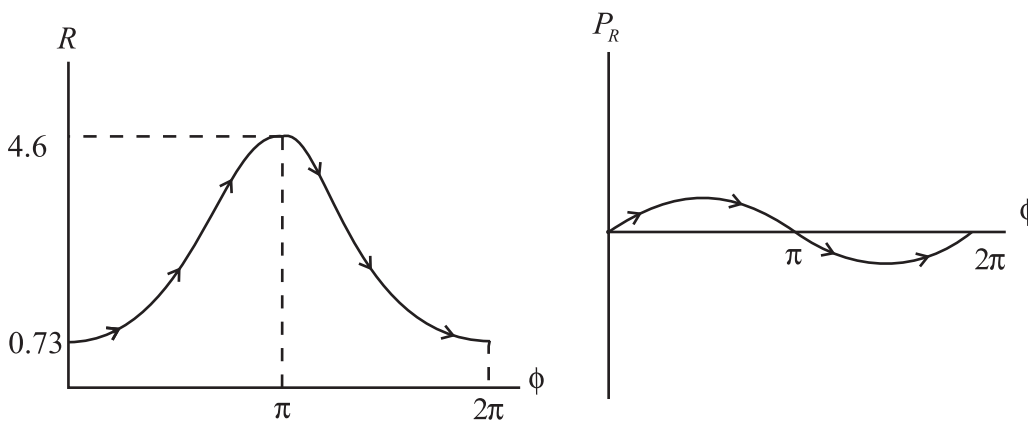
Debido a que el sentido de recorrer la curva está dado por el campo vectorial, se puede ver (gráfica 12) cómo al aumentar  $R$  de 0.73 a 1.2 también aumenta el momento  $P_R$  de 0 a su máximo valor, incrementando la energía  $\frac{P_R^2}{2\mu}$  como se veía anteriormente con el potencial efectivo (gráfica 7); posteriormente cuando  $R$  varía de 1.2 a 4.6,  $P_R$  disminuye hasta cero debido a que no hay suficiente energía para separar las masas definitivamente, por consiguiente se verán atraídas de nuevo. Esto implica,

siguiendo la línea de evolución (gráfica 12), que la coordenada  $R$  varía de 4.6 a 0.73, donde  $P_R$  aumenta negativamente como indica el campo vectorial, incrementando a su vez la energía  $\frac{P_R^2}{2\mu}$  hasta el punto donde  $R=1.2$ ; ahora cuando  $R$  cambia de 1.2 a 0.73 la energía  $\frac{P_R^2}{2\mu}$  disminuirá a cero debido al máximo acercamiento entre las masas, esto es 0.73, donde el momento  $P_R$  será nulo. De esta forma, se ha analizado la proyección de la línea de evolución en el plano  $R-P_R$  (gráfica 12).



(Gráfica 12)

Proyecciones de la línea de evolución y el campo vectorial en el plano  $R-P_R$



(Gráfica 13)

Proyección de la línea de evolución en los planos  $\phi-R$  y  $\phi-P_R$  respectivamente.

La proyección de la línea de evolución en los otros planos (gráfica 13) indica el comportamiento de  $P_R$  y  $R$  cuando varía la coordenada  $\phi$ . Así, cuando  $\phi$  va de 0 a  $\pi$ , el comportamiento de  $P_R$  es el mismo cuando  $R$  cambia de 0.73 a 4.6 (gráfica 12), y posteriormente al variar  $\phi$  de  $\pi$  a  $2\pi$  el comportamiento de  $P_R$  es el mismo cuando  $R$  varía de 4.6 a 0.73. Las curvas en la gráfica 13 son relativas, debido a que dependen del estado inicial elegido, esto es, si se comienza a graficar la línea de evolución desde el estado inicial:

$$\vec{\xi}_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ \phi_0 \\ P_{R0} \\ P_{\phi_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.73 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

las proyecciones en los diferentes planos de la línea de evolución serán las que aparecen en las gráficas 12 y 13, pero debido a que la coordenada  $\phi$  no aparece en el hamiltoniano, cualquier valor inicial que pueda tomar no afecta la energía del sistema ni mu-

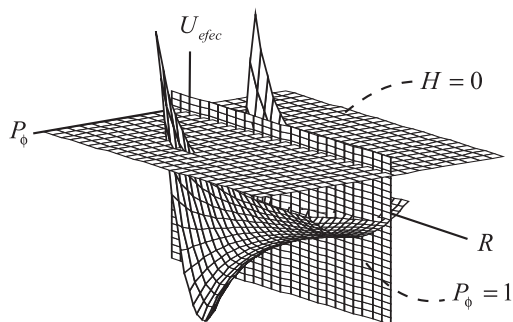
cho menos el valor dado para  $P_\phi$ . Así, con base en el estado inicial anterior, se pueden tener varios estados iniciales para diferentes valores iniciales de  $\phi$ , lo que implica que las curvas en la gráfica 13 se desfasen un ángulo  $\phi_0$  igual al valor inicial dado para  $\phi$ . Por ejemplo, si se parte a graficar la línea de evolución desde el estado inicial:

$$\vec{\xi}_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ \phi_0 \\ P_{R0} \\ P_{\phi_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.73 \\ \pi/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las curvas en la gráfica 13 estarán desfasadas un ángulo igual a  $\phi_0 = \pi/2$ .

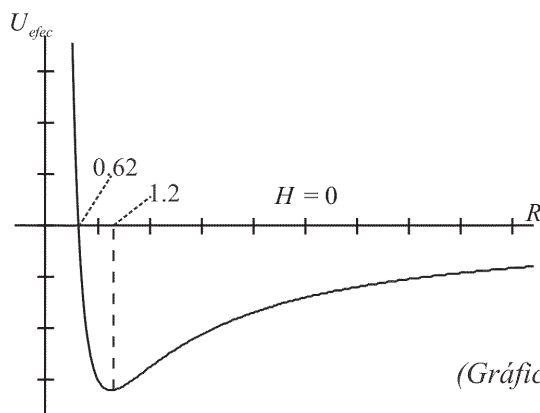
### Caso 2: $H=0$ y $P_\phi=1$

Se mirará ahora cuál será la línea de evolución correspondiente a  $P_\phi=1$  y  $H=0$ . En esta nueva situación la gráfica del potencial será interceptada por el plano  $H=0$  y  $P_\phi=1$  (gráfica 14a).



(Gráfica 14a)

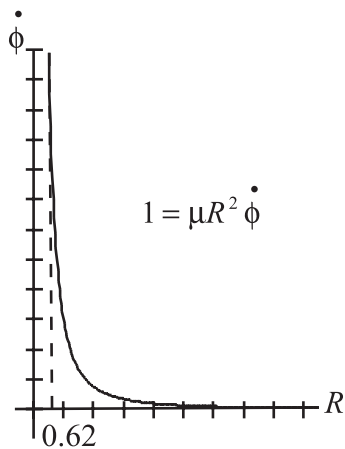
Superficie de potencial efectivo interceptada por dos planos perpendiculares entre sí definidos por  $H=0$  y  $P_\phi=1$ .



(Gráfica 14b)

Curva de potencial efectivo inscrita en el plano  $P_\phi=1$ , con un corte en el punto  $R=0.62$  por la energía constante  $H=0$

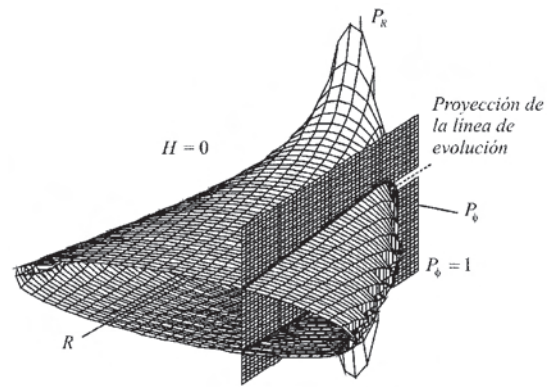
En contraste con la gráfica del potencial anterior (gráfica 7), la coordenada  $R$  de los estados del sistema que cumplan con las nuevas condiciones  $H=0$  y  $P_\phi=1$  podrá tomar valores de 0.62 hasta infinito. Estas nuevas condiciones indican la suficiente energía del sistema para que las masas no se vuelvan a encontrar jamás, esto es, si se parte de la distancia mínima de acercamiento  $R=0.62$  donde el potencial efectivo es igual al hamiltoniano  $U_{efec} = \frac{1^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R} = 0$ , el movimiento de rotación del sistema es máximo debido a que se debe cumplir  $1 = \mu R^2 \dot{\phi}$  (gráfica 15), lo que implica que las partículas se alejan rápidamente aumentando la energía  $\frac{P_R^2}{2\mu}$  a su máximo valor cuando  $R=1.2$ , donde posteriormente las masas tenderán a alejarse cada vez más disminuyendo tanto la energía  $\frac{P_R^2}{2\mu}$  como el movimiento de rotación del sistema, debido a que la separación  $R$  tenderá hasta infinito permitiendo así que el potencial tienda a cero.



(Gráfica 15)

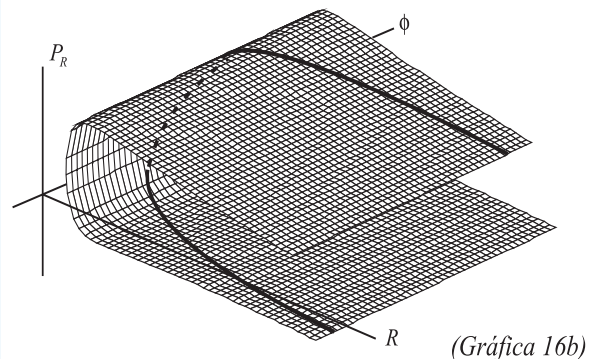
Gráfica de  $1 = \mu R^2 \dot{\phi}$  definida en el intervalo de 0.62 a infinito, en este caso cuando  $R=0.62$  el movimiento de rotación del sistema es máximo, pero será igual a cero cuando  $R$  tienda a infinito.  
 $\dot{\phi} \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow \infty$

Ahora, será importante mirar la intersección de las dos hipersuperficies  $H=0$  y  $P_\phi=1$  en el espacio de fases del sistema para obtener la línea de evolución correspondiente, (gráficas 16a y 16b).



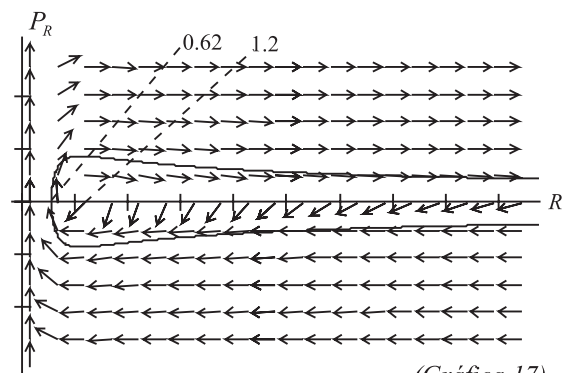
(Gráfica 16a)

Proyección en el espacio  $R, P_\phi$  y  $P_R$  de la intersección de la hipersuperficie  $H=0$  con el hiperplano  $P_\phi=1$  y la línea de evolución que surge de esta intersección.



(Gráfica 16b)

Proyección de la línea de evolución en el espacio  $R, \phi$  y  $P_R$



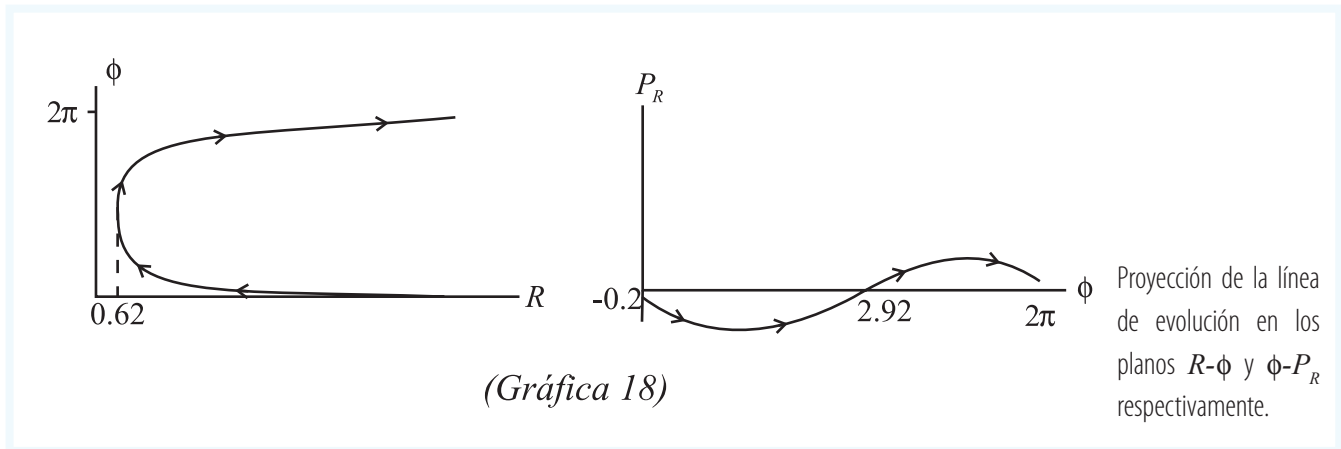
(Gráfica 17)

Proyecciones de la línea de evolución y el campo vectorial en el plano  $R-P_R$



En la proyección de la curva de evolución (gráfica 17) se puede ver cómo el momento  $P_R$  debido al campo vectorial, aumenta de forma negativa al disminuir la coordenada  $R$  hasta el punto  $R=1.2$ , pero debido a la rotación máxima del sistema en el punto  $R=0.62$  (gráfica 15) y por el potencial efectivo restringido por  $H=0$ ,

el momento  $P_R$  es nulo, lo que implica que las masas no podrán colisionar, de tal forma que se separarán rápidamente aumentando  $P_R$  a su máximo cuando  $R=1.2$ , donde posteriormente se seguirán alejando hasta el infinito, disminuyendo simultáneamente  $P_R$  y el movimiento de rotación del sistema a cero.

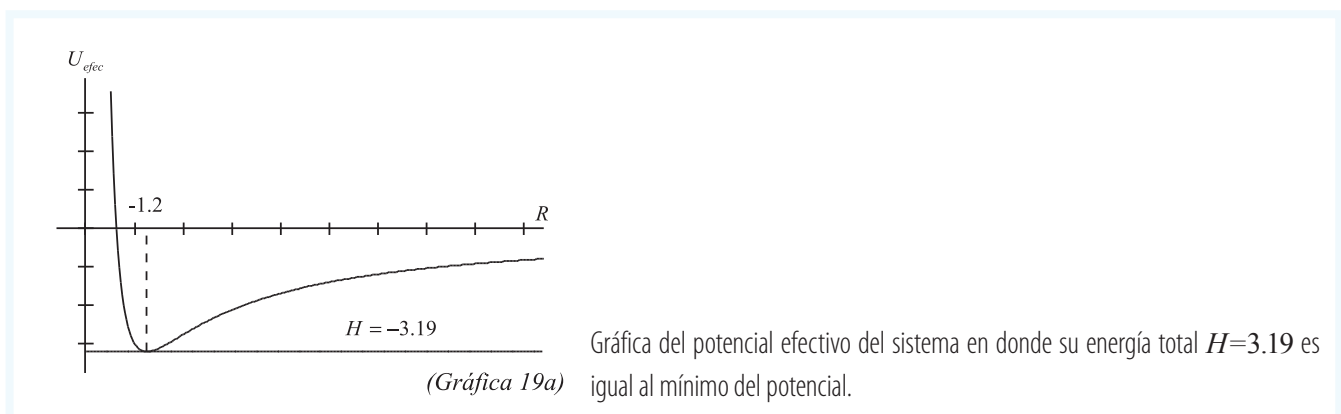


En la proyección de la línea de evolución en los planos  $R-\phi$  y  $\phi-P_R$  (gráfica 18), se puede ver cómo al aumentar el ángulo  $\phi$  hasta 2.92 el momento  $P_R$  aumenta negativamente a su máximo valor, disminuyendo luego a cero cuando  $\phi$  llega a 2.92, en este caso la separación  $R$  entre las partículas llega a su mínimo valor permitido; esto es  $R=0.62$ . Posteriormente se ve cómo al aumentar  $R$  de 0.62 a infinito, el ángulo se acerca a  $2\pi$  sin llegar a él, lo que indica que el sistema

no alcanza a dar un giro completo en la evolución, además el momento  $P_R$ , después de llegar a su máximo tenderá a cero mientras  $\phi$  lo hace a  $2\pi$ .

### Caso 3: $H=U_{\text{efect-mínimo}}$ y $P_\phi = l$

Será interesante ver qué sucede cuando la energía del sistema es igual al valor mínimo del potencial efectivo<sup>18</sup> (gráfica 19a).



<sup>18</sup> El mínimo del potencial efectivo  $U_{\text{efec}} = \frac{l^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R}$  se encuentra en el punto donde  $\frac{dU_{\text{efec}}}{dR} = 0$ , o sea  $R = \frac{l}{\mu k} = 1.2$  donde  $H=U_{\text{efect-mínimo}}$

En este caso por la restricción de la energía total, los estados del sistema serán aquellos cuya coordenada  $R$  conserven el valor  $R=1.2$  en la evolución. Debido a que  $R$  no varía el momento asociado  $P_R$  será nulo; por tanto, los estados mecánicos del sistema serán:

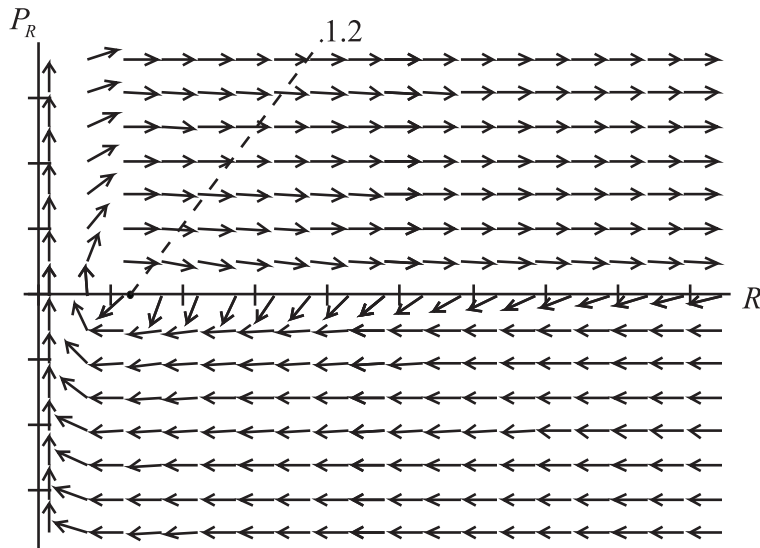
$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} R \\ \phi_0 \\ P_{R0} \\ P_{\phi 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ \phi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

para todos los posibles valores de  $\phi$  (Gráfica 19b).

Esto implica que el sistema rotará como si fuera un cuerpo rígido con un momento  $P_\phi=1$  en toda la evolución.

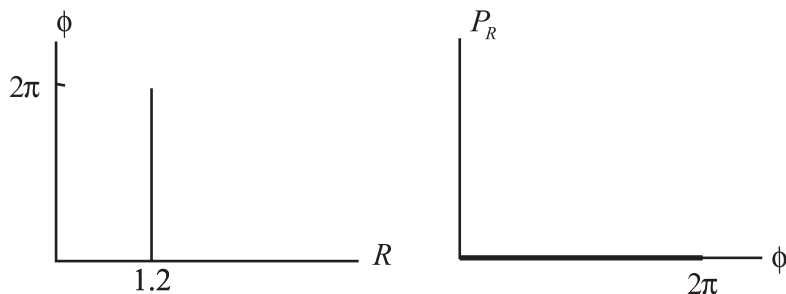
**Caso 4:  $H=0$  y  $P_\phi=0$**

Es importante ver el caso particular en el que el movimiento de los dos cuerpos únicamente sucede a lo largo de la línea que los une, esto implica que no hay movimiento de rotación o sea  $P_\phi=0$ ; si de nuevo se utiliza un valor de energía  $H=0$  la superficie del po-



(Gráfica 19b)

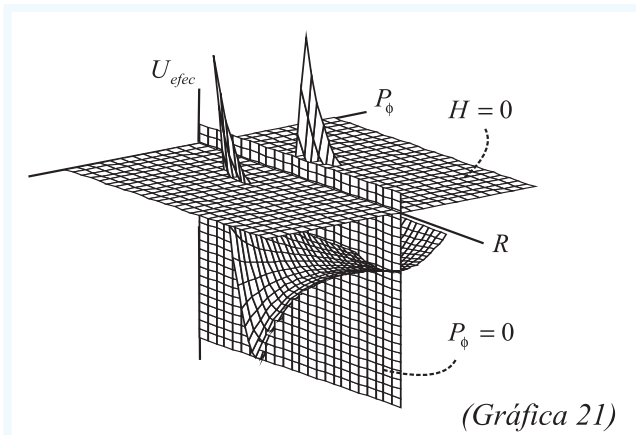
La línea de evolución donde se conserva  $H=3.19$  y  $P_\phi=1$  proyectada en el plano  $R-P_R$ , es un punto.



(Gráfica 20)

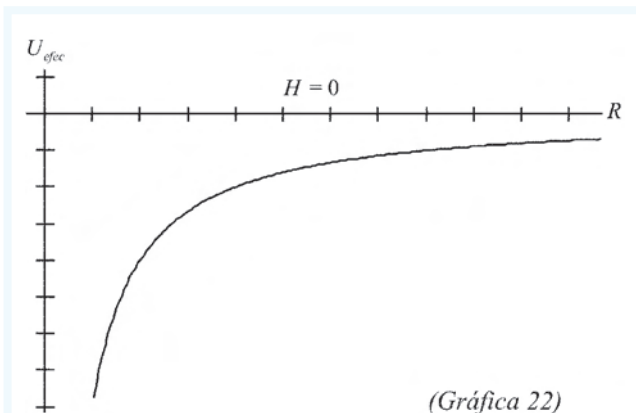
Proyección de la línea de evolución en los planos  $R-\phi$  y  $\phi-P_R$  respectivamente.

tencial estará cortada por estos dos planos perpendiculares (gráfica 21).



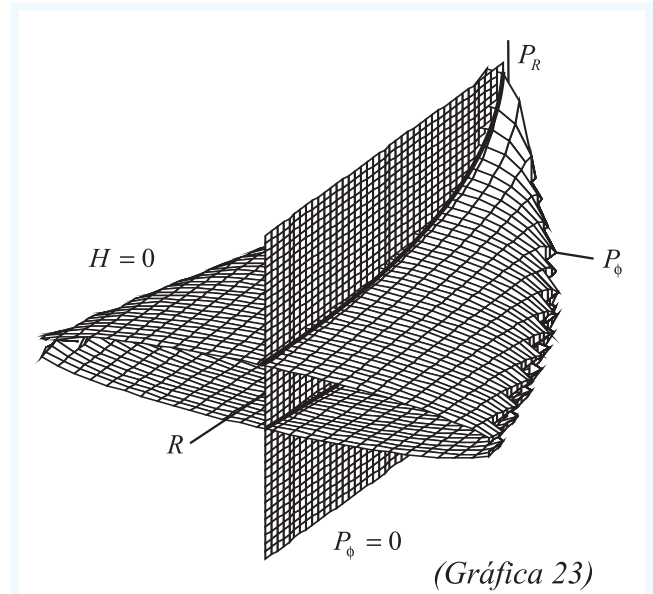
Superficie de potencial efectivo cortada por dos planos perpendiculares entre sí definidos por  $H=0$  y  $P_\phi=0$

El plano  $P_\phi=0$  al cortar la superficie del potencial, da como resultado la energía gravitacional (gráfica 1), indicando a su vez que tal energía es un caso particular del potencial efectivo (gráfica 22).



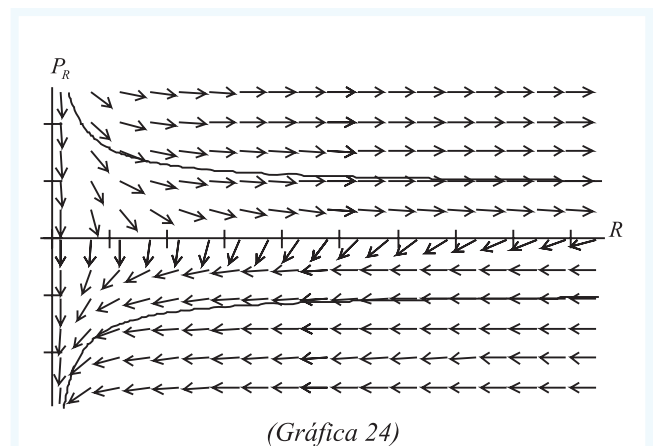
Energía potencial gravitacional como caso particular del potencial efectivo en donde aparece la constante de energía del sistema  $H=0$

La coordenada  $R$  de los estados del sistema que cumplan con las condiciones  $H=0$  y  $P_\phi=0$  podrá tomar todos los valores posibles dentro del intervalo abierto de cero hasta infinito.



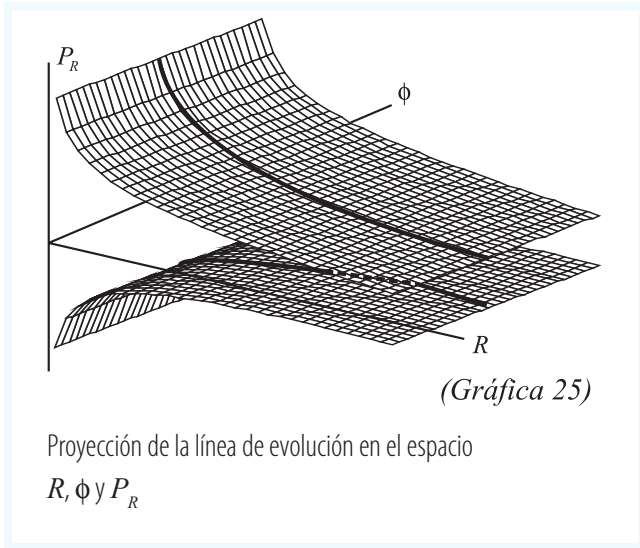
Proyecciones en el espacio  $R, P_\phi$  y  $P_R$  de la intersección de la hipersuperficie  $H=0$  con el hiperplano  $P_\phi=0$ , y la línea de evolución que surge de esta intersección.

Como  $H = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\phi^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R}$  reemplazando las condiciones  $H=0$  y  $P_\phi=0$  se obtiene  $P_R = \pm \sqrt{\frac{2\mu k}{R}}$  ecuación de la proyección de la línea de evolución en el plano  $R-P_R$  (gráfica 24).



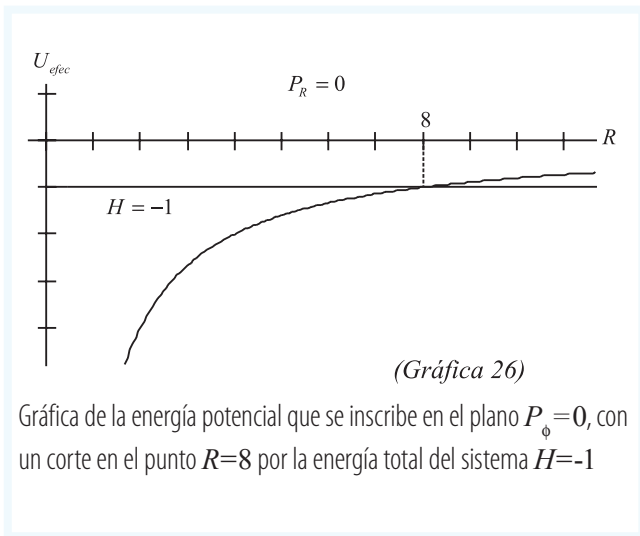
Línea de evolución y campo vectorial proyectados en el plano  $R-P_R$

Si se toma la ecuación  $P_R = \pm \sqrt{\frac{2\mu k}{R}}$  curva superior y el campo vectorial (gráfica 24), la evolución del estado indica cómo las masas tienden a separarse hasta el infinito, donde  $P_\phi = 0$ . Por otro lado, la ecuación  $P_R = \pm \sqrt{\frac{2\mu k}{R}}$  curva inferior y el campo vectorial (gráfica 24), muestran cómo hay suficiente energía en el sistema para que las masas con una separación infinita se acerquen hasta el punto de colisionar. Es importante ver que estas dos curvas conforman una sola, debido a que se unen en el infinito.

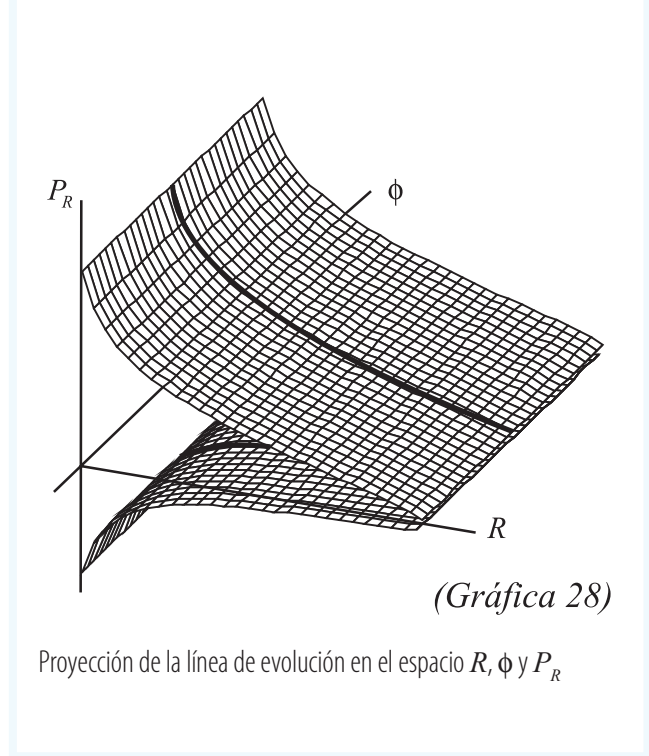
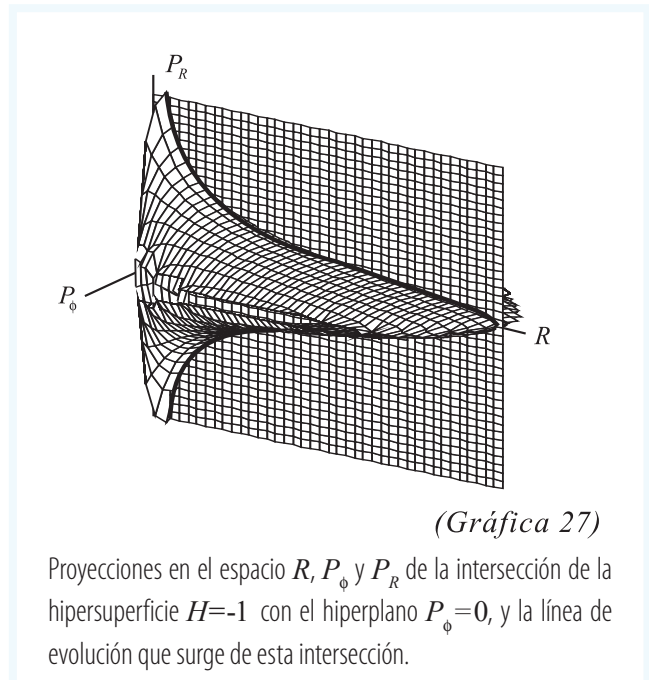


**Caso 5:  $H=-1$  y  $P_\phi=0$**

Por último, se considerará el valor de la energía del sistema  $H=-1$  y el momento  $P_\phi=0$  en la evolución del sistema.



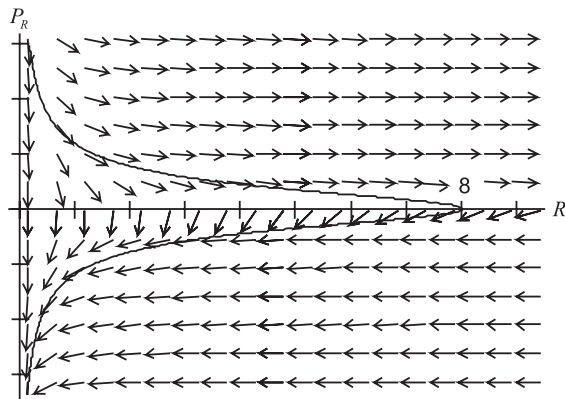
La energía potencial con el valor de energía del sistema  $H=-1$  (gráfica 26), indica que los estados permitidos serán aquellos cuya coordenada  $R$  esté definida dentro del intervalo de 0 a 8. Esto trae como consecuencia que el sistema tienda al colapso, debido a que las masas no pueden, en este caso, separarse infinitamente.



Partiendo del hamiltoniano  $H = \frac{P_R^2}{2\mu} + \frac{P_\phi^2}{2\mu R^2} - \frac{k}{R}$  y reemplazando las condiciones  $H = -1$  y  $P_\phi = 0$ , obtenemos la expresión  $P_R = \pm \sqrt{-2\mu + \frac{2\mu k}{R}}$  de la proyección de la línea de evolución en el plano  $R$ - $P_R$  (gráfica 29).

Por el campo vectorial se puede ver cómo al incrementar las distancias entre las masas el momento

$P_R$  disminuye a cero para una separación de 8. Posteriormente, las masas comienzan a acercarse más rápidamente, a medida que disminuye la distancia entre ellas, debido a que  $P_R$  aumenta negativamente hasta llegar al punto donde el sistema colapsa totalmente.



(Gráfica 29)

Línea de evolución y campo vectorial proyectados en el plano  $R$ - $P_R$ .

## Conclusión

Los conceptos fundamentales de esta mecánica se fueron construyendo a medida que se ejemplificaba -a nuestro parecer sin pérdida de generalidad- con el caso de los dos cuerpos, de tal forma que al final se obtuvo una estructura conceptual y teórica coherente de la perspectiva hamiltoniana a nivel introductorio, susceptible de ser aplicada a otros problemas diferentes en esta rama de la física. La manera en que se presenta en este trabajo adquiere especial importancia para la enseñanza de la física, porque además de mostrar esta organización de una forma diferente y bastante accesible, se hace énfasis especial en la geometrización de la dinámica del sistema. Esta perspectiva permite ver y utilizar la geometría como un esquema organizador, el cual da un panorama global de los conceptos físicos, lo que no es posible hacer, en forma clara, con un tratamiento puramente algebraico. Por tal motivo, esta forma de ver la Mecánica de Hamilton puede ser abordada en los primeros cursos de física a nivel universitario sin que requiera prerrequisitos formales para su comprensión; contrario a lo que se muestra en los textos usuales de mecánica analítica.

El estudio del caso de los dos cuerpos desde esta perspectiva mecánica fue completo y exacto, ya que, en primer lugar, era más importante dar cuenta de la dinámica del sistema como un todo y no de los cuerpos por separado; por tal motivo, fue necesario la definición de sistema, concepto al cual, posteriormente, se le asignarían cualidades independientes referentes a su ámbito mecánico, cuya concreción permitiría hablar del estado general del sistema respecto a tales cualidades. La descripción mecánica de la evolución del sistema involucró tanto su configuración como su movimiento, aspectos que algunas veces en la enseñanza de la mecánica son reducidos el uno al otro (por ejemplo, considerar el movimien-

to como un simple cambio de posición en el tiempo), o en otras perspectivas, como en la lagrangiana sólo se tienen en cuenta su configuración y los cambios en el tiempo sin involucrar el movimiento del sistema. Es por esto que la mecánica hamiltoniana, debido a que tiene en cuenta el movimiento del sistema, además de ser independiente de su configuración, es más coherente con las experiencias que vive en primera instancia el ser humano cuando concibe el movimiento independiente de la posición, en donde tales experiencias tienden a ser perturbadas cuando por primera vez se reduce el movimiento a un simple cambio de posición en el tiempo.

Caracterizado el sistema, definiendo el estado referente a las cualidades tenidas en cuenta, la construcción de la función hamiltoniana que a su vez estaría referida a la magnitud energía del sistema, por su conservación condujo a las ecuaciones de Hamilton encargadas de la evolución del sistema, de tal forma que siempre permanecería invariante esta magnitud. La solución de estas ecuaciones llevó a la necesidad de utilizar los métodos numéricos que permitieron, no solamente hallar las líneas de evolución del estado del sistema, sino también, junto con la geometría, aportar al significado de las ecuaciones diferenciales y a su solución. Por la existencia de otra magnitud invariante en la evolución fue posible junto con el hamiltoniano en el espacio de fases, saber la historia completa y exacta de la evolución del sistema, reflejándose en caminos inscritos sobre superficies que resultaban de proyecciones de hipersuperficies en el espacio de fases tetradimensional, de esta forma fue posible leer y analizar la dinámica del sistema.

En el momento de abordar la mecánica cuántica, resulta evidente lo fundamental de la formulación hamiltoniana de la mecánica. Dirac, en su tratado *Principios de Mecánica Cuántica*, muestra cómo una

amplia gama de sistemas cuánticos pueden ser tratados por analogía con los sistemas clásicos hamiltonianos, donde la importancia de trabajar la analogía con esta mecánica en especial radica, por un lado, en poder obtener leyes y teoremas en la cuántica que sean generalizaciones de los resultados obtenidos

en esta perspectiva clásica, y por otro, en la necesidad de conservar la estructura algebraica de los corchetes de Poisson para crear objetos análogos, los corchetes cuánticos, que cumplan esa misma estructura, que permiten dar cuenta de las condiciones cuánticas de estos sistemas en especial.

## Bibliografía

GOLDSTEIN, Herbert. (1963). *Mecánica clásica*. Madrid: Aguilar.

HAUSER, Walter. (1966). *Introduction to the principles of mechanics*. Massachusetts: Addison-Wesley series in physics. Northeastern University.

MARION, Jerry B. (1975). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Barcelona: Reverté.

V. JOSÉ, Jorge y EUGENE, Saletan. (1998). *Classical Dynamics. A Contemporary Approach*. Cambridge University Press.

## Biografía

**William Rowan Hamilton**  
(1805-1865)



Matemático irlandés, físico, astrónomo y filósofo, estudió en el Trinity College. En 1827, sin haber obtenido su título, fue nombrado profesor de astronomía, y al año siguiente astrónomo real para Irlanda. Hamilton pasó el resto de su vida trabajando en el Trinity College y en el observatorio de Dunsink, cerca de Dublín. Concibió el álgebra como una ciencia del tiempo puro y orientó sus investigaciones hacia una matematización sistemática del mundo físico. Estructuró la teoría de los números complejos, que definió como pares de números reales, en cuyo conjunto definió una ley de composición conmutativa. De singular importancia es su aportación

sobre la teoría de los cuaternios y de los hipernúmeros. Elaboró una teoría matemática de la óptica y un formalismo abstracto de la mecánica clásica. Destacan sus obras *Métodos generales de dinámica* y *Elementos de cuaterniones*. El trabajo de Hamilton en dinámica fue después decisivo en el desarrollo del cuanto, donde un concepto fundamental llamado hamiltoniano lleva su nombre. Además, introdujo las ecuaciones de Hamilton, que expresan la suma de las energías de un sistema dinámico y son muy importantes en el desarrollo de la dinámica moderna y para el estudio de la teoría cuántica.

Tomado de:

[http://es.wikipedia.org/wiki/William\\_Rowan\\_Hamilton](http://es.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton)

## Sobre el Autor

**Mauricio Medina Gamba** es Licenciado en Física de la Universidad Pedagógica Nacional. Participó en el proyecto *Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos*, como asistente de investigación, realizado mediante convenio entre la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad de Antioquia. Además, fue invitado como coautor de la ponencia titulada *On the physical sense of some 2-tensor interpretations from a teaching point of view*, escrita por el Ph.D. Plamen Nechev, la cual se presentó en la I Conferencia Internacional de Educación En Física. En la actualidad trabaja como docente en el sector privado.